*

Aksepterbarhet og troverdighetsgrad

*

Morten Harboe Rognes

2013

*

© Morten Harboe Rognes 2013

§1 Innledning

I en rekke tidligere arbeider, som vi her forutsetter at leseren er fortrolig med[1], beskrev og utviklet vi en teori om presise deskriptive utsagn, egenskaper, mengder og mulige verdener. Denne teorien ble kalt for E;3. Fjerner vi fra denne teorien de primitive predikatene og aksiomene som har med egenskaper å gjøre får man en mindre omfattende delteori, nemlig T;1. Denne sistenevnte teori er utførlig beskrevet og drøftet i Rognes [2], mens teorien E;3 diskuteres i Rognes [4] og [5]. I det følgende arbeid vil disse to teoriene fungere som en ramme for våre overlegninger og vi vil hovedsakelig ta vårt utgangspunkt i E;3.

I det foreliggende arbeid vil språket til teorien E;3 bli utvidet med to nye primitive predikater, nemlig to-plass predikatet "x er et utsagn som bør aksepteres relativt til utsagnet y" og tre-plass predikatet "x er den grad av rasjonell troverdighet som utsagnet y har relativt til utsagnet z". Vi får da som resultat et mer uttrykksrikt språk. I denne innledningen vil vi betegne dette språket med L. Innenfor språkrammen L vil vi så betrakte en rekke setninger som inneholder de predikatene som nettopp ble nevnt og som intuitivt synes å være sanne i kraft av betydningen til de to konstruksjonene. Vi vil så ta ut en delmengde av disse setningene som synes tilstrekkelig enkle, plausible og samlet sett deduktivt sterke, og legge dem til teorien E;3 som nye ikke-logiske aksiomer slik at vi får en generell logisk teori om de to relasjonene som er nevnt. Dernest vil vi studere forskjellige fragmenter av teorien, studere forskjellige alternative aksiomatiseringer av den, og i en viss utstrekning utvikle konsekvensene av teorien, dvs. utvikle og bevise ikke-trivielle teoremer som kan utledes. I tillegg til dette vil vi også studere visse algebraiske strukturer som er relatert til teorien. Endelig vil vi, og dette er kanskje ikke det minst viktige, i noen grad formulere og kommentere mulige alternativer til teorien innenfor den språkrammen L som vi antydet ovenfor.

Den teorien som har blitt antydet ovenfor, og som vil bli detaljert beskrevet og definert på en helt presis måte senere, blir fremlagt her fordi vi ønsker å se nærmere på hvilket lys den kan kaste over de følgende to hovedproblemstillinger som vi nå skal gjøre rede for.

La oss først nevne at vi akkurat i denne forbindelse vil definere et *potensielt datum* som et utsagn som det er logisk mulig at en eller annen ved et eller annet tidspunkt konstaterer riktigheten av ved enten sanseiaktagelse eller ved introspeksjon. Med et *faktisk foreliggende datum* forstår vi et utsagn som en eller annen ved et eller annet tidspunkt faktisk har konstatert riktigheten av ved enten sanseiaktagelse eller introspeksjon. Et vanlig vitenskapsfilosofisk synspunkt kan da uttrykkes ved den følgende tese: *Til enhver konsistent mengde med potensielle data vil det alltid eksistere en uendelig mengde med innbyrdes uforenelige teorier som kan forklare disse data*. Akkurat her vil vi ikke diskutere eller trekke denne tese i tvil. Vi vil rett og slett ta den for gitt. Men tar man den for gitt virker det svært rimelig å ta i betraktning det følgende problem: Siden det neppe kan være slik at alle de teoriene som er konsistente med og som kan forklare dataene i en konsistent mengde med potensielle data, kan anses som like plausible, siden teoriene i dette mangfold er innbyrdes logisk sett uforenelige, er det naturlig å stille spørsmålet om hvilke av dem, om noen, man bør akseptere

1 Det dreier seg om følgende arbeider: Rognes[1], [2], [4] og [5].

© Morten Harboe Rognes 2013

relativt til de gitte data. Spørsmålet kan også stilles mer generelt slik: Gitt at det finnes en uendelig mengde med innbyrdes uforenelige utsagn som impliserer et utsagn x, hvilke av disse utsagn eller utsagnsmengder bør man da, om noen, akseptere relativt til x om man forutsetter at x representerer alt man har av evidens? Dette er det første hovedproblem som utgjør en del av bakgrunnen for det følgende arbeid.

Det kan være gunstig på dette punkt å antyde det svar den teorien som vi skal senere definere presist gir på dette spørsmål. Med *sannhetsmengden til et utsagn* forstår vi mengden av alle de mulige verdener hvor utsagnet er sant. Med den *epistemiske kjerne* til et utsagn forstår vi mengden av alle de mulige verdener i sannhetsmengden til utsagnet som har maksimal grad av indre koherens, harmoni og enkelhet. I lys av disse definisjonene kan det teorien sier kort sammenfattes slik: Et utsagn y bør aksepteres relativt til et annet utsagn x hvis og bare hvis den epistemiske kjernen til utsagnet x er ikke-tom og det dessuten er slik at utsagnet y har en sannhetsmengde som omfatter den epistemiske kjernen til utsagnet x. Dette prinsipp, som vi vil kalle enkelthetsprinsippet, vil vi naturlig nok formulere presist senere i dette skrift. Vi vil også undersøke nærmere dets konsekvenser innenfor rammen av L. Dessuten vil vi innenfor denne rammen undersøke forskjellige teorier som impliserer denne tesen.

La oss så rette blikket mot den andre hovedproblemstillingen som vi vil beskjeftige oss med i dette skrift.

Anta at Δ er en konsistent mengde med potensielle data. Anta videre at det finnes visse utsagn som bør aksepteres relativt til Δ og visse utsagn som bør forkastes.[2] La Γ være mengden av alle de utsagn som hverken bør aksepteres eller som bør forkastes relativt til Δ. For de aller fleste Δ virker det rimelig å tro at Γ er ikke-tom og at kardinaltallet til Γ er meget stort. Det er også klart at dersom et utsagn er med i denne mengden Γ er også negasjonen av utsagnet med. Det virker derfor ikke rimelig å si at alle disse utsagnene er like gode eller plausible. Spørsmålet oppstår derfor om det er mulig å tilskrive alle disse utsagnene, eller utsagnene i en nærmere bestemt delmengde av Γ, grader av troverdighet slik at noen av utsagnene må klassifiseres som lite troverdige, mens andre bør tilskrives en forholdsvis stor grad av troverdighet. Og om dette er mulig kan man også spørre om hvordan, og etter hvilke prinsipper, man bør tilskrive troverdighetsgrad til disse utsagnene. En rekke mer spesielle problemer oppstår da. La oss antyde noen av disse problemstillingene.

Anta x er et utsagn og at det finnes utsagn som bør aksepteres relativt til x. Bør da alle utsagn som bør aksepteres relativt til x tilskrives troverdighetsgraden 1 relativt til x? Og er det rimelig å hevde at alle de utsagn som bør forkastes relativt til x bør tilskrives den rasjonelle troverdighetsgraden 0 ? Eller er det snarere slik at noen av de akseptable utsagn relativt til x ikke kan tilskrives noen grad av troverdighet, mens alle de akseptable utsagn relativt til x som kan tilskrives en troverdighetsgrad bør tilskrives troverdighetsgraden 1 ? De spørsmål som her er nevnt er en del av dem som inngår idet knippe av spørsmål som kan sies å utgjøre vår andre hovedproblemstilling.

Når det gjelder den teorien om rasjonell troverdighetsgrad som vi senere skal formulere synes

2 At et utsagn y bør forkastes relativt til Δ innebærer her nøyaktig det samme som at negasjonen av y bør aksepteres relativt til Δ. Dersom Δ er en mengde med utsagn innebærer det at et utsagn x bør aksepteres relativt til Δ intet annet enn at x bør aksepteres relativt til konjunksjonen av alle utsagnene som er med i Δ.

© Morten Harboe Rognes 2013

det berettiget å si at den kaster noe lys over de problemer vi her har nevnt. Først og fremst må teorien sies å kunne gi en forholdsvis stor informasjon om hvilken grad av troverdighet som bør tilskrives visse utsagn når troverdighetsgraden til andre utsagn forutsettes kjent. La oss i denne forbindelse få frem poenget noe tydeligere. Anta Δ er en mengde med utsagn hvor alle utsagnene antas å ha en på forhånd kjent grad av troverdighet retivt til utsagn e som tenkes å representere all tilgjengelig evidens. Anta C(Δ) betegner den minste utsagnsmengden som inneholder Δ og som er lukket under alle boolske operasjoner på utsagn. Dette innebærer at detsom et utsagn x er med i C(Δ) så er også negasjonen av utsagnet x med i Δ. Videre innebærer dette at C(Δ) er lukket under endelig disjunksjon og konjunksjon og dermed alle operasjoner som kan defineres ved hjelp av negasjon, disjunksjon og konjunksjon. Under disse omstendigheter kan man si at teoriens aksiomer er formulert slik at de teoretisk sett entydig bestemmer troverdighetsgraden til alle utsagnene i den mer omfattende mengden C(Δ) relativt til e, og at de i endel tilfelle gjør det mulig foreta konkrete beregninger av troverdighetsgraden til et utsagn når troverdighetsgraden til andre er kjent.

Videre gir teorien også en viss informasjon om hvordan troverdighetsgraden til et utsagn varierer med med de utsagn vi vi vurderer det reativt til. La oss forklare dette nærmere: Anta, som ovenfor, at Δ er en mengde med utsagn hvor alle utsagnene antas å ha en kjent troverdighetsgrad relativt til e. La C(Δ) være definert som tidligere. Man kan da si , om xêC(Δ) og y er et eller annet utsagn i C(Δ) som har en troverdighetsgrad relativt til e som er større enn 0, at teorien fikserer troverdighetsgraden til x relativt til K(e,y), konjunksjonen av utsagnet e og utsagnet y. I en del tilfelle vil det også være mulig å gi en rent tallmessig beregning av denne troverdighetsgrad.

Sammenfattende kan vi si dette: Teorien om troverdighetsgrad som vil bli beskrevet og undersøkt gir en en mulighet for å begrunne en viss påstand om den relative troverdighetsgrad til et utsagn x ved å vise at denne påstand kan utledes fra visse andre påstander om den relative troverdighetsgraden til visse utsagn y;1,... y;n. Disse påstander kan så kanskje i sin tur begrunnes ved å utlede dem fra atter andre setninger om den relative troverdighetsgrad til andre utsagn z;1,...., z;n osv. På denne måten opptrer en regressiv begrunnelseskjede. I praksis vil en slik begrunnelseskjede måtte stanse etter et endelig antall trinn. Man står da tilbake med visse påstander om grader av relativ troverdighet til visse utsagn relativt til visse andre som ikke umiddelbart kan begrunnes på denne måten. La oss akkurat her kalle disse påstandene for ultimate , "siste og dypeste", påstander om relativ troverdighetsgrad. Det må da klart medgis og erkjennes at den teorien som vil bli formulert ikke i særlig grad kan brukes til å avgjøre denne typen utsagn. Derimot synes det berettiget å si at teorien kan kaste noe lys over hva slags mengder av denne type utsagn som kan anses som konsistente, og hvilke som bør avvises som inkonsistente. Det ville være en feil å overse dette. På denne måte bidrar teorien til å skape orden, motsigelsesfrihet og indre sammenheng i de oppfatninger man har om grader av troverdighet.

Vi har nå angitt våre to hovedproblemstillinger og i noen grad skissert i hvilken grad de teoriene vi skal studere nærmere kan bidra til å kaste lys over dem. Men før vi går over til den konkrete og detaljerte fremstilling av teoriene vil vi, ganske kort, gjøre rede for forholdet mellom disse to hovedproblemstillingene og det problem, eller knippe av problemstillinger, som går under navnet induksjonsproblemet. Dette vil forhåpentlig plassere vårt arbeid bedre i en mer omfattende filosofisk sammenheng.

La oss først innføre noen terminologiske konvensjoner som vi finner hensiktsmessige

© Morten Harboe Rognes 2013

for å gjøre fremstillingen mer oversiktlig. Med et argument forstår vi et ordnet par <Δ,x> hvor x er en setning og Δ en ikke-tom mengde av setninger. Med en slutning forstår vi det samme som et argument. I et argument kaller vi setningene i den første komponenten for premissene, den andre komponenten konklusjonen. Et argument kalles logisk gyldig hvis og bare hvis konjunksjonen av alle de utsagn som uttrykkes av premissene logisk sett impliserer det utsagn som uttrykkes av konklusjonen, dvs. hvis og bare hvis sannhetsmengden til det utsagn som er konjunksjonen av de utsagn som uttrykkes av premissene er inkludert i sannhetsmengden til det utsagn som uttrykkes av konklusjonen. Induksjon oppfattes ofte som den motsatte prosedyre av logisk deduksjon. Mens man ved logisk deduksjon fra visse oppgitte premisser utleder en konklusjon som logisk sett følger fra premissene, vil man ved induksjon slutte fra visse premisser til en konklusjon som naturlig nok er konsistent med premissene, men som ikke logisk sett følger dem, snarere motsatt, konklusjonen vil implisere premissene eller i det minste noen utsagn som er implisert av premissene. Hvis man tar sitt utgangspunkt i denne oppfatning av hva induksjon er virker det nærliggende å definere *et induktivt argument* som et argument som ikke er logisk gyldig, men der konklusjon og premisser utgjør en konsistent setningsmengde og der konklusjonen enten impliserer premissene eller har endel konsekvenser felles med premissene. Siden det imidlertid er slik at ethvert argument oppfyller det siste kravet kan man like godt definere et induktivt argument som et logisk ugyldig argument der premisser og konklusjon sammen utgjør en konsistent setningsmengde. I det følgende vil vi holde oss til denne terminologi.

Blandt de induktive argumenter har man en spesiell delmengde som vi kan kalle *induktive generaliseringer*. Dette er induktive argumenter der konklusjonen er et generelt utsagn og premissene utgjøres av et endelig antall instanser av konklusjonen, eller der premissene impliserer et endelig antall av instanser av det generelle utsagn som utgjør konklusjonen. Det er kanskje særlig i forbindelse med det vi her kaller induktive generaliseringer at man bruker ordet "induksjon".

Nå virker det nokså klart at ikke alle induktive slutninger er like gode. I visse tilfelle synes det svært rimelig at noen slutninger fra en oppgitt mengde med data til en teori som går ut over disse data er plausible og fornuftige, mens andre induktive slutninger kan virke uberettigede, uplausible eller likefrem absurde. Dersom en person fra det faktum at løvtrærene i Norge har mistet bladene sine om høsten frem til nå, trekker den slutning at de også neste år vil miste bladene på denne årstid, kan man neppe si at vedkommende sier noe som er absurd. Men dersom en person fra det faktum at ethvert menneske som har avgått ved døden inntil det nuværende tidspunkt også har avgått ved døden før 2050, slutter at ethvert menneske vil avgå ved døden før 2050, vil man si at slutningen naturligvis er absurd og totalt uberettiget, selvom konklusjonen logisk sett er forenelig med premissene.

Selvom induktive slutninger ikke er logisk gyldige, og det derfor kan virke misvisende å bruke ordet "gyldighet" i forbindelse med dem, virker det likevel som om man kan karakterisere noen induktive slutninger som akseptable, andre som uakseptable og atter andre som troverdige i større eller mindre grad. Hvis vi tar vårt utgangspunkt i de konstruksjoner som vi innfører i L synes det nærliggende å si at en induktiv slutning er akseptabel hvis og bare hvis man bør akseptere konklusjonen relativt til konjunksjonen av alle premissene som inngår i den. Vi kan ikke umiddelbart se noen alvorlige innvendinger mot denne definisjonen og den synes forøvrig å passe sammen med det vi tidligere har sagt. Likeledes virker det plausibelt å si at r representerer graden av troverdighet til en induktiv slutning hvis og bare hvis r er den grad av rasjonell troverdighet som bør tilskrives konklusjonen i slutningen

© Morten Harboe Rognes 2013

relativt til konjunksjonen av premissene i den. Definerer man akseptabilitet og grad av troverdighet på denne måten i forbindelse med induktive slutninger ser man umiddelbart at definisjonene kan formaliseres innenfor rammen av det språk L vi har antydet tidligere.

Det vesentlige i det problemkompleks som vanligvis omtales som *induksjonsproblemet* synes nå å kunne uttrykkes ved de følgende spørsmål:

(I) Hvilke induktive slutninger er akseptable og hvilke er uakseptable? Er det mulig å angi opplysende kriterier for når en induktiv slutning er akseptabel og hvordan skal man i så fall begrunne eller rettferdiggjøre disse kriteriene?

(II) Hvordan skal man tilskrive grad av troverdighet til induktive slutninger og hvilke prinsipper gjelder for slike tilordninger? Hvordan skal man, i tilfelle slike prinsipper lar seg formulere, begrunne og rettferdiggjøre dem?

Som antydet ovenfor synes det ikke urimelig å sammenfatte disse to problemstillingene under navnet "induksjonsproblemet".

La oss tilslutt antyde hvordan spørsmålene under I og II forholder seg til de problemstillingene vi tidligere har gjort rede for. Hvis en induktiv slutning er akseptabel innebærer dette ifølge den definisjonen vi ga ovenfor at konlusjonen i den induktive slutningen bør aksepteres relativt til premissene. Hvis vi derfor allment kan angi når en induktiv slutning er akseptabel innebærer dette at vi også kan angi generelt når et utsagn bør aksepteres relativt til et annet. Det omvendte må også gjelde. Man ser derfor at den første delen av induksjonsproblemet i det vesentlig er identisk med den første av våre problemstillinger og i det vesentlige kan oppfattes som en terminologisk variant av denne.

Det samme gjelder for den andre delen av induksjonsproblemet. Hvis man kan angi og begrunne generelle prinsipper for tilordning av grad av troverdighet til induktive slutninger innebærer dette, i lys av de definisjoner vi tidligere har gitt, at man også kan angi og begrunne generelle prinsipper for hvilken grad av troverdighet et utsagn har relativt til et annet. Også her gjelder det omvendte. Et svar på spørsmålene under II vil derfor også gi oss et svar på vår andre problemstilling og omvendt. Man ser derfor at induksjonsproblemet formulert slik det ble gjort ovenfor er ekvivalent med våre to hovedproblemstillinger. Det følger derfor at i den utstrekning de teoriene vi vil være beskjeftiget med kaster lys over våre hovedproblemstillinger vil de også kaste lys over induksjonsproblemet slik dette har blitt oppfattet ovenfor.

§2 Den formelle ramme for våre teorier

Vi skal nå gi en detaljert beskrivelse av språkrammene vi vil arbeide innenfor og dessuten etter hvert spesifisere den øvrige teoretiske ramme. I det følgende skal vi benytte den terminologi og notasjon som er innført i Rognes [1] og Rognes [2]. Vi bruker uttrykket "første-ordens språk" i den betydning som er innført i Rognes [1]. Det første-ordens språk hvis ikke-logiske vokabular består av de følgende to predikater, og bare dem, nemlig (1) "x er en mengde" og (2) "x er et element i mengden y" betegner vi med L;e. De to predikatene forkortes med henholdvis symbolene "M(x)" og "xêy". Når det gjelder den mengdeteoretiske notasjon vil denne i det følgende være som i Rognes [1]. Anta Δ er en vilkårlig mengde med predikatkonstruksjoner. Da betegner "L;e(Δ)" det første-ordens språket

© Morten Harboe Rognes 2013

vi får som resultat når det ikke-logiske vokabularet i L;e utvides med konstruksjonene i mengden Δ og bare dem.. Det vil være beleilig å ha visse symboler til rådighet for noen bestemte mengder med predikatkonstruksjoner. Vi kaller den mengden som inneholder de følgende tre predikatkonstruksjoner, og bare dem, for Δ;0:

(3) "x er en mulig verden"
(4) "x er et utsagn"
(5) "x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant"

Disse tre predikatene forkorter vi med henholdsvis "MV(x)", "U(x)" og "x ⊨ y". Språket L;e(Δ;0) er da det språket vi får når det ikke-logiske vokabularet til L;e utvides med nøyaktig disse tre konstruksjonene. L;e(Δ;0) er forøvrig språket til utsagnsteorien T;1 som er detaljert drøftet i Rognes [2].

Den mengden med predikatkonstruksjoner som inneholder nøyaktig de følgende predikater, nemlig (3) - (5) ovenfor pluss de følgende:

(6) "x er en egenskap av grad y"
(7) "x har egenskapen y i verdenen z"
(8) "x er et mulig individ"

betegner vi med "Δ". De tre predikatene (6) - (8) forkorter vi med henholdsvis "At;y(x)", "H(x,y,z)" og "MI(x)". Vi nevner at L;e(Δ) er språket til de egenskapsteoriene som er fremstilt i Rognes [4], [5] og spesielt er det språket til teorien E;3 som vi nevnte i innledningen. Man ser selvfølgelig at Δ;0 er inkludert i Δ og at språket L;e(Δ) derfor er en utvidelse av språket L;e(Δ;0).

Som vi nevnte i innledningen er språkene til de teoriene vi vil undersøke utvidelser av språket til E;3, dvs. språket L;e(Δ). Vi betrakter de følgende predikater:

(9) "x er et utsagn som bør aksepteres relativt til y"
(10) "z er den grad av rasjonell troverdighet som bør tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y"
(11) "x er en mulig verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen y"

Vi skal benytte visse uttrykk som forkortelser for disse predikatene. Predikatet (9) forkorter vi med "Ba(x,y)", predikatene (10) og (11) forkortes med henholdsvis "Cd(z,x,y)" og "En(x,y)".

Som man husker ble to av disse predikatene nevnt i innledningen, nemlig (9) og (10). Først på et noe senere stadium vil vi trekke inn (11).

I det følgende vil Δ;1, Δ;2 og Δ;3 betegne de predikatmengdene som resulterer når Δ utvides med henholdvis (9), (10) og (11). Dette innebærer at Δ;1 er Δ utvidet med (9) og bare dette predikatet. Δ;2 er Δ utvidet med (10) og bare dette predikatet. Endelig er Δ;3 predikatmengden Δ utvidet med (11) og ingen andre nye predikater. Utvides Δ med *både (9) og (10)* betegner vi den resulterende predikatmengde med Δ;4. Man ser altså at språkene L;e(Δ;i) for i=1, ... ,4 alle er utvidelser av L;e(Δ) og at L;(Δ;4) er en utvidelse av L;e(Δ;1) såvel som en utvidelse av L;e(Δ;2). Vi skal også med "Δ;5" betegne predikatmengden Δ

© Morten Harboe Rognes 2013

utvidet med predikatene (9) og (11). L;e(Δ;5) er derfor en utvidelse av L;e(Δ;1) og L;e(Δ;3), men naturligvis ingen utvidelse av språkene L;e(Δ;2) og L;e(Δ;4)

Vi har nå definert presist de språkene som vi hovedsakelig vil arbeide innenfor.

I Rognes [1], som vi forutsetter at leseren har studert og er fullt fortrolig med, avgrenset vi eksakt, for ethvert språk av typen L;e(Γ), hvor Γ er en mengde med meningsfulle predikatkonstruksjoner, en klasse av formler i L;e(Γ), nemlig klassen av ZFC;u-aksiomene i L;e(Γ). Er Γ en eller annen mengde med predikater betegner vi den første-ordens teorien hvis språk er L;e(Γ) og hvis ikke-logiske aksiomer er ZFC;u-aksiomene i L;e(Γ) med ZFC;u(L;e(Γ)). Utvides en første-ordens teori av typen ZFC;u(L;e(Γ) med ytterligere formler i en mengde θ Inkl Fm(L;e(Γ)) som ikke-logiske aksiomer betegner vi den resulterende teori med ZFC;u(L;e(Γ))[θ].

I Rognes [4] avgrenset vi en mengde av utsagnsteoretiske aksiomer, nemlig U1 - U4, samt en mengde med aksiomer om egenskaper E1 - E7. Disse aksiomene er alle formler i L;e(Δ). Vi har altså U1 - U4, E1 - E7 êFm(L;e(Δ)). La oss kalle mengden av disse formlene U1 - U4, E1 - E7 for θ;0. Teorien E;3 er da første-ordens teorien ZFC;u(L;e(Δ)) utvidet med formlene i θ;0, med andre ord har vi at E;3 = ZFC;u(L;e(Δ))[θ;0]. Utvides språket i denne teorien til L;e(Δ;i) der i =1, ..., 4 kan man betrakte teoriene:

ZFC;u(L;e(Δ;i))[θ;0] der i =1, ... ,4.

Disse teoriene vil da være, noe man innser ved litt ettertanke, som teorien E;3 bortsett fra to ting: (i) Språket til E;3 har blitt utvidet med et eller flere av predikatene (9) - (11) som vi nevnte ovenfor. (ii) I de nye teoriene har vi også lagt til alle nye instanser av de mengdeteoretiske aksiomskjemaene utsondringsaksiomet og replacement-aksiomet i det utvidete språket L;e(Δ;i) (i=1,....,4) som nye ikke-logiske aksiomer.

I Del I av dette arbeidet vil vi først ta vårt utgangspunkt i teorien ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0]. I språket L;e(Δ;1) vil vi så se på særlig tolv grunnleggende setninger om aksepterbarhetsrelasjonen Ba(x,y). Disse setningene vil bli betegnet B1, ..., B12. Når disse legges til teorien ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] som nye ikke-logiske aksiomer fås som resultat en teori vi vil kalle B;1. Denne vil så bli drøftet og utviklet videre. I Del I vil vi også studere en annen utvidelse av ZFC;u(L;e(Δ;3))[θ;0]. Vi vil spesifisere visse setninger om enkelhetsrelasjonen En(x,y) i L;e(Δ;3) og se nærmere på teorien som oppstår når ZFC;u(L;e(Δ;3))[θ;0] utvides med disse nye formlene som ikke-logiske aksiomer. Denne teorien vi bli betegnet B;2. Vi vil så vise at disse to teoriene B;1 og B;2 er ekvivalente i en nærmere presisert betydning. Dette skulle forøvrig forklare hvorfor vi ovenfor også har innført predikatet (11) ie. "En(x,y)", selvom dette predikatet ikke ble nevnt i innledningen.

I Del II tar vi utgangspunkt i språket L;e(Δ;2) og teorien ZFC;u(L;e(Δ;2))[θ;0] og utvider denne med nye ikke-logiske aksiomer til en teori som vi kaller C;1. Dette skjer selvfølgelig ved at vi spesifiserer en rekke nye ikke-logiske aksiomer om grad av troverdighet, det dreier seg om setningene C1 - C10 som er formler i L;e(Δ;2).Vi kommer tilbake til dem senere. Disse formlene legges så til ZFC;u(L;e(Δ;2))[θ;0] slik at vi får teorien C1.

I Del II betrakter vi også en syntese av de to teoriene B;1 og C;1. Denne betegnes

© Morten Harboe Rognes 2013

BC;1 og den fremkommer fra ZFC;u(L;e(Δ;4))[θ;0] ved å legge til B1 - B12 og C1- C10 som nye ikke-logiske aksiomer. I tillegg betrakter vi visse mulige grunnsetninger C11 - C13 som forbinder akseptanserelasjonen til grad av troverdighet.

Det som så langt er nevnt er imidlertid ingen fullstendig angivelse av innholdet i Del I og Del II. I tillegg til å spesifisere de nevnte teorier diskuterer vi utførlig grunnsetningene i de forskjellige teoriene, ser på en lang rekke satser som kan utledes i dem, og betrakter varianter og alternativer til teoriene.

§3 Mengdeteoretisk notasjon og notasjon i forbindelse med utsagn og egenskaper.

Vi finner det hensiktsmessig å si noen ord om vår notasjon i forbindelse med mengdeteoretiske begreper, utsagn og egenskaper før vi tar fatt på våre egentlige anliggender.

Når det gjelder mengdeteoretiske definisjoner og notasjon er denne stort sett den vanlige i forbindelse med slike operasjoner som snitt, union, komplement, kartesisk produkt, domenet til en funksjon, verdiområdet til en funksjon, relasjoner, ordinaltall. Når det gjelder snittet av to mengder x og y betegnes dette med "xΩy". Er x en mengde av mengder betegnes snittet av alle elementene i mengden x med SN(x). Tilsvarende for union. Unionen av alle elementene i x betegnes med UN(x). Når det gjelder kardinaltall brukes skrivemåten "Aleph;0" for det første aleph-tall. "Aleph;1", "Aleph;2",... etc. for kardinaltallene utover i rekken av kardinaltall. Forøvrig gjør vi oppmerksom på at den mengdeteoretiske notasjon vi benytter er forklart systematisk og utførlig i Rognes [1] og ligger nært opp til den som benyttes i Takeuti [1] og andre standard lærebøker i mengdelære.

Når det gjelder notasjonen i forbindelse med mulige verdener, utsagn og egenskaper og begreper som er definert ved hjelp av disse begrepene er notasjonen den samme som i Rognes [2], [3], [4] og [5]. En fullstendig redegjørelse vil man derfor finne i disse arbeidene. Her skal vi bare minne om enkelte viktige punkter.

Vi betegner mengden av mulige verdener med I. Denne mengden er definert ved $I = Mg(x: MV(x))$. Uttrykket "U" betegner mengden av alle utsagn og er definert ved $U = Mg(x: U(x))$. Med sannhetsmengden til et utsagn x forstår vi mengden av alle de logisk mulige verdener hvor utsagnet er sant. Sannhetsmengden til x betegnes med "μ(x)" og er definert slik: $\mu(x) = Mg(w: w \models x)$. Det fremgår av dette at μ er en funksjon som tilordner et hvert utsagn en mengde med mulige verdener. Denne funksjonen er definert ved

$$\mu = Mg(\langle x, Mg(w: w \models x)\rangle: x \hat{e} U)$$

Den konverse funksjon til μ betegner vi med "μ;-1". Siden den konverse funksjonen μ;-1 tilordner enhver mengde av mulige verdener et utsagn vil μ;-1(I) og μ;-1(ø) være utsagn. Vi kaller μ;-1(I), utsagnet hvis sannhetsmengde er mengden av alle mulige verdener, for det nødvendige utsagn. μ;-1(ø) kalles for det kontradiktoriske utsagn siden det ikke er sant i noen mulig verden. Vi vil av og til bruke "t" til å betegne det nødvendige (tautologiske) utsagn μ;-1(I). Det kontradiktoriske utsagn μ;-1(ø) vil bli betegnet med "k".

Er x et utsagn betegner "Neg(x)" negasjonen av utsagnet x. Er x og y utsagn betegner "K(x,y)", "D(x,y)", "C(x,y)" og "E(x,y)" henholdsvis konjunksjonen av utsagnene x ogy,

© Morten Harboe Rognes 2013

disjunksjonen av x og y, kondisjonalutsagnet med x som antesedent og y som konsekvent og bikondisjonalutsagnet med x som venstre og y som høyre komponent. Er α en vilkårlig mengde med utsagn betegner "SNu(α)" konjunksjonen av alle utsagnene i α. Uttrykket "UNu(α)" betegner disjunksjonen av alle utsagnene i α.

Er α en mengde med utsagn innebærer Cons(α) at α er konsistent, med andre ord at det finnes en verden hvor alle utsagnene i α er sanne. Man har altså at Cons(α) holder hvis og bare hvis μ(SNu(α)) ≠ ø. Vi bruker "LK(x,y)" som forkortelse for "Utsagnet x er en logisk konsekvens av utsagnet y". Det at LK(x,y) innebærer derfor at x er implisert av y, med andre ord at alle de verdner der utsagnet y er sant er verdener der også utsagnet x er sant. Vi har derfor at LK(x,y) holder hvis og bare hvis μ(y) Inkl μ(x).

Det vi har nevnt ovenfor er i hovedsaken det vi på dette punkt vil nevne om den notasjon vi benytter i forbindelse med utsagn.

Når det gjelder egenskaper[3] nevner vi at A;n for nêN, der N er mengden av de naturlige tall, betegner klassen av n-ære egenskaper. Er x en egenskap, det vil si et element i UN/nêN/(A;n), og er w en mulig verden betegner "Ekst;w(x)" ekstensjonen til egenskapen x i verdenen w, det vil si mengden av alle de mulige individer som har egeneskapen x i denne verdenen w. "Ekst;w(x)" er definert ved: Ekst;w(x)= Mg(y: H(y,x,w))

I det følgende bruker vi D for mengden av alle mulige individer. Dette innebærer at D= Mg(x: MI(x)). Er x en egenskap betegner Neg;a(x) negasjonen av egenskapen x. Er α en mengde med egenskaper betegner "UNa(α)" og "SNa(α)" henholdsvis unionen og konjunksjonen av alle egenskapene i α. La oss også nevne at dersom x er en egenskap og a et vilkårlig mulig individ betegner "u(x,a)" det utsagnet som sier at a har egenskapen x. Uttrykket "u(x,a)" er formelt definert slik: u(x,a)= μ;-1(Mg(w:wêI & H(a,x,w))).

Dette avslutter vår oversikt over den notasjon vi bruker i forbindelse med de mest sentrale begrepene som har å gjøre med egenskaper.

Del I

§4 Teorien B;1

I denne delen av vårt arbeid skal vi gjøre det følgende. Vi tar først vårt utgangspunkt i språket L;e(Δ;1), det vil si språket L;e(Δ) utvidet med utelukkende det nye predikatet "Utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y". Vi spesifiserer så tolv setninger i L;e(Δ;1), B1 - B12 , som blir drøftet etterhvert som vi introduserer dem. Vi kaller så teorien ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] utvidet med disse nye setningene som ikke-logiske aksiomer for B;1. Dette skjer i §5.

I den etterfølgende paragrafen, §6, innfører vi en rekke begrepsdannelser av rent mengdeteoretisk natur. Hovedsakelig dreier det seg om definisjoner av hva som menes med en utvalgsstruktur, hva som menes med en preferanserelasjon og hva som menes med en

3 Det bør understrekes at vi bruker uttrykket "attributt" synonymt med ordet "egenskap". Heller ikke skiller vi mellom, eller finner den minste grunn til å skille mellom, begreper og egenskaper. Begrepet 'hest' er ikke noe annet enn egenskapen å være en hest. Man kan konsultere Rognes [4] for en begrunnelse for dette standpunkt.

© Morten Harboe Rognes 2013

underliggende preferanserelasjon til en utvalgsstruktur. Vi viser så en rekke satser i teorien B;1 som samlet gir oss følgende resultat: Det finnes en entydig bestemt preferanserelasjon over mengden av mulige verdener I som oppfyller følgende krav: Er x og y to vilkårlige utsagn er det slik at x bør aksepteres relativt til y hvis og bare hvis mengden av R-maksimale elementer i μ(y) er ikke-tom og inkludert i μ(x). Denne setningen er selv en formel i L;e(Δ;1). Vi kaller den B14. Vi viser så at om teorien ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] uvides med B2 og B14 som de eneste nye ikke-logiske aksiomene, får man en teori som er deduktivt ekvivalent med B;1. Kaller man den nye teorien for B;1* har man derfor at mengden av teoremer i B;1 er identisk med mengden av teoremer i B;1*, med andre ord holder det at Th(B;1) = Th(B;1*). Dette resultat er ikke-trivielt og utledes ved hjelp av et viktig teorem til Bengt Hansson om utvalgsstrukturer. I §7 går vi videre og viser at den entydig bestemte preferanserelasjonen som er nevnt i B14 kan karakteriseres på to andre alternative måter i teorien B;1.

Den predikatmengden som består av av Δ utvidet med "utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y" pluss " x er en verden med minst like stor grad av koherens, harmoni og enkelhet" kaller vi Δ;5. I §8 betrakter vi språket L;e(Δ;5) og formulerer en utvidelse av ZFC;u(L;e(Δ;5))[θ;0] i dette språk som vi kaller B;2*. Vi betrakter også den teorien vi får når vi fjerner det første av de to ovenfornevnte predikatene fra B;2*. Denne teorien kalles B;2. Det viktigste resultat av formell art i denne paragrafen er at de to teoriene B;2 og B;2* er helt ekvivalente og at de begge er ekvivalente med B;1 og B;1* i den forstand at B;1 (B;1*) kan gis en naturlig intepretasjon inn i B;2 (B;2*) og omvendt. I denne paragrafen formulerer vi også mer eksplisitt det vi i innledningen har kalt enkelhetsprinsippet.

I §9 drøfter vi enkelte sider ved enkelhetsprinsippet og formulerer endel teorier som kan oppfattes som alternativer til B;2* og dermed også til B;1 og B;1*. I §10 betrakter vi to akseptanseteoretiske teser av mer spesiell art, men som det likevel er naturlig å undersøke. Vi viser innenfor rammen av B;1 at det første prinsippet er ekvivalent med at enkelhetsrelasjonen mellom mulige verdener er identisk med IxI og at det andre prinsippet er ekvivalent med den påstand at enkelhetsrelasjonen er strengt lineær. I §11 gir vi en grundigere diskusjon av enkelhetsprinsippet, videre de resultater vi har nådd frem til i §5 - §10. Dessuten diskuterer vi hvilken relevans våre resulater har for den første hovedproblemstilling som vi gjorde rede for i innledningen.

§5 Grunnsetninger i teorien B;1

I dette avsnittet skal vi gi spesifisere grunnsetningene i teorien B;1. Vi minner om at Δ;1, slik det fremgår fra det vi har skrevet tidligere, er predikatmengden Δ utvidet med predikatet "Ba(x,y)". Som man husker er dette uttrykket forkortelse for "Utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y". De grunnsetningene vi nå formulerer er naturligvis formler i L;e(Δ;1).

Det virker rimelig å tro at dersom et utsagn x bør aksepteres relativt til utsagnet y, kort sagt dersom noe utsagn bør aksepteres relativt til y, så bør også det nødvendige utsagn aksepteres relativt til y. Det nødvendige utsagn er det utsagn som er sant i enhver logisk mulig verden, med andre ord utsagnet μ;-1(I). Den påstanden vi har nevnt kan følgelig formleres på denne måten:

B1 $Ba(x,y) \rightarrow Ba(\mu;-1(I),y)$

© Morten Harboe Rognes 2013

Setningen uttrykker at dersom utsagnet x bør aksepteres reltivt til y bør også det nødvendige utsagn aksepteres relativt til y. Dette virker utvilsom sant og kan neppe betviles dersom man annerkjenner at predikatet "bør akseptere" har mening. Dersom x er et utsagn som bør aksepteres relativt til et annet utsagn y er det trivielt at x, såvel som y må være utsagn. Dette er innholdet i den følgende grunnsetning:

B2 $Ba(x,y) \rightarrow x\hat{e}U \,\&\, y\hat{e}U$

Vi minner om at U er mengden av alle utsagn. Det følger fra denne grunnsetningen at Ba er en relasjon mellom utsagn. Definerer vi $Ba^* = Mg(<x,y>: Ba(x,y))$ har man naturligvis at $Ba \text{ Inkl } UxU$.

La oss nå gå over til den tredje grunnsetningen. Denne sier ikke noe annet enn at dersom et utsagn x bør aksepteres relativt til et utsagn y, og z er et utsagn som logisk sett er en konsekvens av x, så bør også z aksepteres relativt til y. Uttrykt på en annen måte er tanken at dersom et utsagn x bør aksepteres relativt til y bør alle utsagn som er logisk sett implisert av x også aksepteres relativt til y. At et utsagn x logisk sett impliserer et annet utsagn y er tilfelle hvis og bare hvis sannhetsmengden til x er inkludert i sannhetsmengden til y, med andre ord dersom og bare dersom $\mu(x) \text{ Inkl } \mu(y)$. Den tredje grunnsetningen kan derfor formuleres slik:

B3 $Ba(x,y) \,\&\, z\hat{e}U \,\&\, \mu(x) \text{ Inkl } \mu(z) \rightarrow Ba(z,y)$

Det er vanskelig å se hvordan man skal kunne formulere noen moteksempler til dette prinsipp. Hvis predikatet Ba overhodet har noen mening må dette prinsipp aksepteres i kraft av betydningen til dette predikatet og den betydning vi tillegger uttrykket "logisk implikasjon".

Vår fjerde grunnsetning sier at dersom et eller annet utsagn bør aksepteres relativt til y er det ikke slik at det kontradiktoriske utsagn, med andre ord $\mu;-1(\text{ø})$, bør aksepteres relativt til y. Grunnsetningen kan formuleres slik:

B4 $Ba(x,y) \rightarrow \neg\, Ba(\mu;-1(\text{ø}),y)$

Også dette synes å følge direkte fra hva man legger i uttrykket "bør akseptere". Å hevde at man bør akseptere et kontradiktorisk utsagn virker uforståelig. Siden ethvert kontradiktorisk utsagn impliserer ethvert annet utsagn følger det at B4 impliserer at mengden av alle utsagn som bør aksepteres relativt til et utsagn y utgjør en konsistent utsagnsmengde i lys av de andre grunnsetningene som vi så langt har nevnt.

Det neste aksiomet sier at dersom α er en ikke-tom utsagnsmengde og hvert utsagn i α bør aksepteres relativt til utsagnet y bør også konjunksjonen av utsagnene i α aksepteres relativt til y. Setningen kan formuleres slik:

B5 $M(\alpha) \,\&\, \text{ø}\neq\alpha \text{ Inkl } U \,\&\, (Ax)(x\hat{e}\alpha \rightarrow Ba(x,y)) \,\&\, y\hat{e}U \rightarrow Ba(SNu(\alpha),y)$

Sammen med de øvrige aksiomer som vi så langt har nevnt impliserer denne setningen at mengden av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til utsagnet y utgjør en deduktivt lukket konsistent utsagnsmengde. Også B5 må karakteriseres som en temmelig innlysende påstand som det virker absurd å benekte.

Hvis man bør akseptere utsagnet x relativt til y virker det uimotsigelig å hevde at x må

© Morten Harboe Rognes 2013

være konsistent med y, med andre ord at man ikke kan utlede noen kontradiksjon fra konjunksjonen av x og y. Dette prinsipp, som virker temmelig selvinnlysende, kan formuleres formelt slik:

B6 $\quad Ba(x,y) \rightarrow \neg(K(x,y) = \mu;\text{-}1(\text{ø}))$

At $K(x,y) = \mu;\text{-}1(\text{ø}))$ innebærer at konjunksjonen av x og y ikke er sann i noen mulig verden. Negasjonen av påstanden $K(x,y) = \mu;\text{-}1(\text{ø})$ er derfor ekvivalent med at K(x,y) er sann i minst en mulig verden, med andre at K(x,y) er en konsistent påstand.[4]

Teorien som består av prinsippene B1 - B6 kan karakteriseres som forholdsvis svak. Den representerer så og si en minimal teori om akseptanse-relasjonen Ba. Det synes umulig å benekte noen av grunnsetningene B1 - B6 uten at man ender opp med en teori som er fullstendig inkonsistent med det meningsinnhold som rimeligvis kan tilskrives predikatet "x er et utsagn som bør aksepteres relativt til utsagnet y".

Teorien som så langt er angitt sier imidlertid lite om hvordan Mg(x: Ba(x,y)) avhenger av y. Vi skal se litt nærmere på enkelte prinsipper som gir en litt mer informasjon om dette. La oss først innføre følgende begrep: Sannhetsmengden til konjunksjonen av alle de utsagnene som bør aksepteres relativt til y skal vi kalle for mengden av de epistemisk sett ideelle verdenene i y. De epistemisk sett ideelle verdnene i utsagnet y er altså $\mu(SNu(Mg(x: Ba(x,y))))$. Siden y åpenbart bør aksepteres gitt at noe bør aksepteres relativt til y, dette prinsipp betegner vi B9 og vil bli diskutert nedenfor, har man at mengden av de epistemisk sett ideelle verdenene i y er inkludert i sannhetsmengden til y. La oss forklare hvorfor dette er tilfelle. Anta utsagnet x bør aksepteres relativt til y. Da har man også, i kraft av B9 at y bør aksepteres relativt til y. I så fall har vi at yê Mg(z: Ba(z,y)) og derfor at $\{y\}$ Inkl Mg(z: Ba(z,y)). Dette impliserer at $\mu(Snu(Mg(z:Ba(z,y)))) \text{ Inkl } \mu(SNu(\{y\})) = \mu(y)$, med andre ord har vi at de epistemisk sett ideelle verdenene i y er inkludert i sannhetsmengden til y. Man ser også lett at dersom x bør aksepteres relativt til y vil også de epistemisk sett ideelle verdenene i y ikke bare være inkludert i sannhetsmengden til y, men også til utsagnet x og derfor inkludert i sannhetsmengden til konjunksjonen av x og y.

La oss nå anta at (i) Ba(y,z) og (ii) Ba(x, K(y,z)). Det følger da fra (i) og det vi har sagt ovenfor at de epistemisk ideelle verdenene i z er inkludert i sannhetsmengden til y og i sannhetsmengden til K(y,z). Fra dette i seg selv følger det ikke at de epistemisk sett ideelle verdenene i z er nøyaktig de samme som de epistemisk sett ideelle verdenene i K(y,z). Men det virker svært naturlig å anta dette. I så fall følger ved hjelp av (ii) at de epistemisk sett ideelle verdenene i K(x,y) er inkludert i sannhetsmengden til x. Enn mer følger at de epistemisk sett ideelle verdenene i z også er inkludert i sannhetsmengden til x og derfor at Ba(x,z). Men fra dette og (i) følger Ba(K(x,y),z). Man ser derfor at følgende prinsipp er rimelig og nærmest uimotsigelig:

B7 $\quad Ba(y,z) \,\&\, Ba(x,K(y,z)) \rightarrow Ba(K(x,y), z)$

4 I forbindelse med B6 nevner vi at dette prinsipp ikke kan utledes fra B1- B5. Vi skal her ikke gi noe detaljert bevis, men bare antyde et moteksempel. La w1 og w2 være distinkte mulige verdener. Definer en utsagnsrelasjon R ved $R = Mg(<x,y>: x,y\hat{e}U \,\&\, x\hat{e}C(w1) \,\&\, y=\mu;\text{-}1(\{w2\}))$. Merk at C(w1) er mengden av alle de utsagn som er sanne i w1. Det er da ikke vanskelig å se at denne utsagnsrelasjonen oppfyller kravene B1- B5, men at den ikke oppfyller kravet B6 for alle utsagn x,y.

© Morten Harboe Rognes 2013

Dette prinsippet har forøvrig en viss formell analogi med den setning i sannsynlighetsteorien som ofte går under navnet det multiplikative prinsipp.

Anta at at det finnes utsagn som bør aksepteres relativt til y. Da vil mengden av de epistemisk sett ideelle verdenene i y være en ikke-tom mengde og inkludert i sannhetsmengden til y. Med andre ord har vi $\mu(SNu(Mg(z: Ba(z,y))))$ Inkl $\mu(y)$. Anta nå at x er et utsagn som impliserer y. Da har vi at sannhetsmengden til x er inkludert i sannhetsmengden til y. Det vil si at $\mu(x)$ Inkl $\mu(y)$. Anta at det også finnes utsagn som bør aksepteres relativt til x. Da vil det også være slik at mengden av de epistemisk sett ideelle elementene i x vil være ikke-tom og inkludert i x. La oss nå anta at sannhetsmengden til x har noen elementer felles med mengden av de epistemisk sett ideelle ideelle verdenene i utsagnet y. Hvordan vil under disse forutsetninger forholdet være mellom snittet av x og de epistemisk sett ideelle verdenene i y og de epistemisk sett ideelle verdenene i x. Den følgende grunnsetning sier at disse to mengdene er identiske. Dette innebærer at gitt de forutsetningene vi har nevnt skulle man ha:

$$\mu(x) \Omega\ \mu(SNu(Mg(z: Ba(z,y)))) = \mu(SNu(Mg(z: Ba(z,x))))$$

Man ser lett at dette er ekvivalent med at $K(x, SNu(Mg(z: Ba(z,y)))) = SNu(Mg(z: Ba(z,x)))$. Den grunnsetningen vi har i tankene kan følgelig formuleres slik:

B8 $x,y \hat{e} U$ & $(Er)(Ba(r,x))$ & $(Es)(Ba(s,y))$ & $\mu(x)$ Inkl $\mu(y)$
$\mu(x)\ \Omega\ \mu(SNu(Mg(z: Ba(z,y)))) \neq \emptyset \rightarrow$
$K(x, SNu(Mg(z: Ba(z,y)))) = SNu(Mg(z: Ba(z,x)))$

Forutsetningene i dette aksiomet er dem vi har nevnt ovenfor. For det første at x og y er utsagn, med andre ord at $x,y \hat{e} U$. For det andre at det finnes utsagn som bør aksepteres relativt til x og y, ie.: $(Er)(Ba(r,x))$ & $(Es)(Ba(s,y))$. For det tredje at sannhetsmengden til x er inkludert i sannhetsmengden til y. Dette er uttrykt ved $\mu(x)$ Inkl $\mu(y)$. For det fjerde er det forutsatt at sannhetsmengden til x har minst ett felles element med mengden av alle de epistemisk sett ideelle elementene i y. Dette kommer frem i forutsetningen om at $\mu(x)\ \Omega\ \mu(SNu(Mg(z: Ba(z,y)))) \neq \emptyset$. Konsekventen i B8 er den som vi nevnte ovenfor, nemlig at $K(x, SNu(Mg(z: Ba(z,y)))) = SNu(Mg(z: Ba(z,x)))$.

Man kan ikke uten videre si at denne setningen er selvinnlysende. Men ved ettertanke, og særlig etter at vi har undersøkt den nærmere, dette vil skje i de etterfølgende avsnitt og paragrafer, tror jeg at man vil kunne la seg overbevise om at B8 er langt fra en vilkårlig og uplausibel antagelse. La oss tilslutt nevne at B8 har en sterk formel likhet med det som i Hansson [1] kalles for "Arrows aksiom". I alt vesentlig er grunnsetningen ovenfor dette aksiomet formulert innenfor vår akseptanseteoretiske ramme.

Vi har allerede nevnt den følgende grunnsetning:

B9 $Ba(x,y) \rightarrow Ba(y,y)$

Denne setningen uttrykker at dersom et eller annet utsagn bør aksepteres relativt til utsagnet y bør også utsagnet y aksepteres relativt til y. Dette virker helt ukontroversielt. Sammen med de andre grunnsetningene vi har nevnt impliserer dette prinsipp at dersom et eller annet utsagn bør aksepteres relativt til y bør også ethvert utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnet y

© Morten Harboe Rognes 2013

aksepteres relativt til y. Når det gjelder aksiomene B1 - B6 og B9 utgjør disse en forholdsvis ukontroversiell teori om akseptanserelasjonen gitt at man aksepterer at de grunnleggende ikke-logiske predikatene i teorien, utenom de mengdeteoretiske og rent logiske, er forståelige og meningsfulle. B7 og B8 kan derimot ikke sies å være innlysende på samme måte. Men de synes likevel å være til en viss grad plausible.

De tre aksiomene som vi nå skal gjøre rede for kan imidlertid ikke sies å ha den samme grad av plausibilitet som de grunnprinsippene vi så langt har nevnt. Det å rettferdigjøre disse prinsippene krever resonnementer av langt mer indirekte karakter.

Det første av disse tre prinsippene er dette:

B10 $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ey)(y\hat{e}U \,\&\, Card(\mu(y)) >= 2 \,\&\, Ba(\mu;\text{-}1(\{w\}), y)))$ [5]

Det denne setningen sier er at om w er en vilkårlig mulig verden så finnes det alltid et utsagn y hvis sannhetsmengde inneholder minst to mulige verdener, og det utsagnet som er sant i verdenen w, og bare denne verdenen, bør aksepteres relativt til dette utsagnet y hvis sannhetsmengde inneholder flere elementer.

La oss i forbindelse med denne setningen bemerke at dersom w er en mulig verden representerer utsagnet $\mu;\text{-}1(\{w\})$ det utsagn hvis sannhetsmengde utenlukkende inneholder verdenen w. Man ser lett at dette utsagnet er identisk med den uendelige konjunksjon av alle de utsagn som er sanne i w. Siden det for ethvert utsagn gjelder at det enten er sant eller usant i verdenen w, innebærer dette i sin tur at mengden av alle de utsagn som er sanne i verdenen w utgjør en komplett teori. Anta nå at $w\hat{e}I$. Ifølge B10 vil det da finnes et utsagn y med en sannhetsmengde som inneholder minst to mulige verdener og der vi har at $\mu;\text{-}1(\{w\})$ bør aksepteres relativt til y. I lys av det vi tidligere har nevnt innebærer dette at de epistemisk sett ideelle verdenene i y rett og slett er mengden $\{w\}$. Sannhetsmengden til y inneholder derfor elementer som er forskjellige fra w og som derfor ikke er epistemisk sett ideelt. Disse elementene synes det derfor rimelig å karakterisere som mindre ideelle enn w. Av denne grunn kan man si at B10 uttrykker at man for enhver verden kan finne en som er mindre ideell. Kort sagt at det finnes uendelig kjede der hvert element er mindre epistemisk ideelt enn det foregående. Knytter vi, noe man bør argumentere nærmere for, epistemisk idealitet til grad av indre harmoni, koherens og enkelhet, kan man si at B10 impliserer at for enhver verden w finnes det en verden w' som har mindre grad av indre harmoni, koherens og enkelhet enn w. Logisk, metafysisk og filosofisk sett virker ikke dette som en uplausibel påstand.

Vår neste grunnsetning sier at ethvert utsagn hvis sannhetsmengde er endelig inneholder visse verdener som er epistemisk sett ideelle. Uttrykt på en annen måte sier grunnsetning at hvis et utsagn har en endelig sannhetsmengde finnes det alltid andre utsagn som bør aksepteres relativt til det. Fra en formal synsvinkel kan denne påstand gjengis slik:

B11 $(Ay)(y\hat{e}U \,\&\, 0 \neq Card(\mu(y)) < Aleph;0. \rightarrow (Ez)(Ba(z,y)))$

Også når det gjelder denne grunnsetningen er det vanskelig å vise at den er rimelig ved å utlede den fra mer evidente og selvinnlysende setninger. Begrunnelsen for den er av en mer indirekte og systematisk natur. I neste paragraf skal vi vise at dersom man inkluderer denne

5 Merk at om α er en mengde leses uttrykket "Card(α)" som "kardinaltallet til mengden α".

© Morten Harboe Rognes 2013

setningen blant våre aksiomer kan man karakterisere akseptanserelasjon Ba på en elegant måte, noe man ikke kan gjøre uten dette aksiomet.

Lignende kommentarer kan gis i forbindelse med den siste grunnsetningen vi vil nevne her. Det dreier seg om den følgende påstand:

$$\text{B12} \quad \neg(Ez)(Ba(z,y)). \rightarrow (Aw)(w\hat{e}\mu(y) \rightarrow (Ew')(w'\hat{e}\mu(y) \,\&\, w'\neq w \,\&\, Ba(\mu;\text{-}1(\{w'\}), \mu;\text{-}1(\{w,w'\}))))$$

Det er åpenbart at kommentarer trengs i forbindelse med denne setningen. La oss anta at w,w' er to distinkte mulige verdener. μ;-1({w'}) er i så fall det utsagnet hvis sannhetsmengde utelukkende inneholder verdenen w', μ;-1({w,w'}) er det utsagnet hvis sannhetsmengde bare består av de to distinkte verdenene w og w'. Har vi da at Ba(μ;-1({w'}), μ;-1({w,w'})) innebærer dette at de epistemisk sett ideelle verdenene til utsagnet y=μ;-1({w,w'}) utgjøres av verdenen w'. Det synes i såfall å innebære at verdenen w er mer ideell epistemisk sett enn verden w'. I lys av disse overveielsene innebærer den høyre siden i B12, nemlig

(Aw)(wêμ(y) → (Ew')(w'êμ(y) & w'≠w & Ba(μ;-1({w'}), μ;-1({w,w'}))))

at det til enhver verden i sannhetsmengden til y finnes en annen verden som epistemisk sett er mer ideell. Dette innebærer med andre ord at det vil finnes en oppadstigende uendelig kjede med stadig mer epistemisk ideelle verdener i sannhetsmengden til y. Men holder dette virker det urimelig å si at det finnes en mengde med epistemisk sett ideelle verdener i y og derfor at noe bør aksepteres relativt til y. Også det motsatte virker rimelig. Dersom det ikke finnes noe utsagn som bør aksepteres relativt til y må enten mengden av de maksimalt sett ideelle verdenene i y være tom, eller så må det finnes en uendelig oppadstigende kjede av verdener som stadig blir mer ideelle i sannhetsmengden til y.

Som antydet ovenfor er det vanskelig å begrunne B12 direkte fra mer innlysende premisser. Begrunnelsen av aksiomet vil eventuelt måtte skje ved mer indirekte og systematiske overveielser.

Vi har nå spesifisert de ikke-logiske aksiomene i akseptanseteorien B;1. De er som man ser aksiomene B1 - B12. Det er nå også mulig å gi en presis definisjon av teorien B;1. Man kan rett og slett definere den som den teorien man får når ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ] utvides med aksiomene B1 - B12. Mer formelt har man:

$$B;1 = ZFC;u(L;e(\Delta;1))[\theta;0 \cup \{B1, \ldots, B12\}]$$

Det kan være på sin plass å avslutte denne paragrafen med endel bemerkninger om hvordan de enkelte aksiomene B1 - B12 innbyrdes forholder seg til hverandre.

Det første man kan nevne er at B1 kan utledes fra B9 og B3. Det er lett å innse dette. Anta at Ba(x,y) for vilkårlige utsagn x og y. Da følger ved hjelp av B9 at Ba(y,y). Nå har man μ;-1(I) êU, med andre ord at μ;-1(I) er et utsagn. Videre er det åpenbart at μ(y) Inkl I= μ(μ;-1(I)). Det følger fra dette, B3 og det at B(y,y) at B(μ;-1(I),y). Det følger at B1 strengt tatt er overflødig og kan utledes fra de resterende aksiomer.

Det kan også noteres at B4 kan utledes fra de resterende aksiomer. Anta for reduktio ad absurdum at Ba(μ;-1(ø),y). Da følger ved hjelp av B6 at ¬(K(μ;-1(ø),y) = μ;-1(ø)). Men konjunksjonen av det kontradiktoriske utsagn og et hvilket som helst annet utsagn er identisk

© Morten Harboe Rognes 2013

med det kontradiktoriske utsagn. Det følger derfor at ¬Ba(μ;-1(ø),y). Fra dette følger B4.

Som det fremgår fra disse bemerkningene kan B1 og B4 strengt tatt sløyfes fra det system av grunnsetninger som vi har nevnt.

Vi merker også at det er lett å utlede den følgende formel i teorien B;1, nemlig

(+) $Ba(x,y) \rightarrow \neg Ba(Neg(x),y)$

For anta for reduktio absurdum at $Ba(x,y) \,\&\, Ba(Neg(x),y)$. Fra dette og B5 følger naturligvis $Ba(K(x,Neg(x)), y)$. Men det er åpenbart at $K(K(x,Neg(x)),y) = \mu;\text{-}1(ø)$. I lys av B6 har vi derfor at $\neg(Ba(x,y) \,\&\, Ba(Neg(x),y))$ og derfor at (+) holder.

Vi skal nå vise at B7 er implisert av B8 og B9 i nærvær av aksiomene B1 - B6. Vi formulerer dette formelt som en egen sats:

Teorem 5.1: Anta B1 - B6, samt B8 og B9 holder. Da kan man utlede B7

Bevis: Det første vi vil vise er:

(+) $Ba(y,z) \,\&\, Ba(x, K(y,z)) \rightarrow$
$K(SNu(Mg(r: Ba(r,z))), K(y,z)) = SNu(Mg(r: Ba(r, K(y,z))))$

Anta derfor for vilkårlige x,y og z at (1) $Ba(y,z) \,\&\, Ba(x,K(y,z))$. Nå har man åpenbart at (2) $\mu(K(y,z))$ Inkl $\mu(z) \,\&\, z,K(y,z) \hat{e} U$. For å vise (+) er det derfor i lys av B8 tilstrekkelig å vise at (3) $\mu(K(y,z)) \,\Omega\, \mu(SNu(Mg(r: Ba(r,z)))) \neq ø$. Siden $y,z \hat{e} Mg(r:Ba(r,z))$ i lys av (1) er det nok å vise (4) $\mu(SNu(Mg(r: Ba(r,z)))) \neq ø$. Fra (1) følger $ø \neq Mg(r: Ba(r,z))$ Inkl U. Dessuten har vi $M(Mg(r: Ba(r,z)))$. Fra disse to forholdene og B5 kan man slutte, siden vi har: $(Ar')(r' \hat{e} Mg(r:Ba(r,z)) \rightarrow Ba(r',z))$, at (5) $Ba(SNu(Mg(r: Ba(r,z))), z)$. Fra dette og B5 følger $K(SNu(Mg(r: Ba(r,z))), z) \neq \mu;\text{-}1(ø)$. Men herav ser man lett at man kan slutte (4). Det følger at (3) og dermed (+) holder.

Anta at (6) $Ba(y,z)$ for vilkårlige y,z I lys av B9 har vi da $z,y \hat{e} Mg(r: Ba(r,z))$ og derfor at $\mu(SNu(Mg(r:Ba(r,z))))$ Inkl $\mu(K(y,z))$. Det følger derfor at

$K(SNu(Mg(r:Ba(r,z))), K(y,z)) = SNu(Mg(r:Ba(r,z)))$. Siden y,z var vilkårlige har vi vist: (7) $(Ay)(Az)(Ba(y,z) \rightarrow K(SNu(Mg(r:Ba(r,z))), K(y,z)) = SNu(Mg(r:Ba(r,z))))$. Fra dette og (+) følger:

(++) $Ba(y,z) \,\&\, Ba(x, K(y,z)) \rightarrow SNu(Mg(r: Ba(r, K(y,z)))) = SNu(Mg(r:Ba(r,z)))$

Man merker seg at (+) og (++) holder for alle x, y og z.

Anta nå for vilkårlige x,y og z at (8) $Ba(y,z) \,\&\, Ba(x, K(y,z))$. Da har vi ved hjelp av (++) at (9) $SNu(Mg(r: Ba(r, K(y,z)))) = SNu(Mg(r:Ba(r,z)))$. Fra den andre konjunkten i (8) følger $x \hat{e} Mg(r: Ba(r, K(y,z)))$ og derfor at $\mu(SNu(Mg(r: Ba(r, K(y,z)))))$ Inkl $\mu(x)$. Fra dette og (9) følger (10) $\mu(SNu(Mg(r:Ba(r,z))))$ Inkl $\mu(x)$. Nå har man ved hjelp av (8), B5 og B9 at (11) $Ba(SNu(Mg(r: Ba(r,z))),z)$. Men fra dette,(10) og B3 kan man slutte $Ba(x,z)$. Siden det fra (8) følger $Ba(y,z)$ har vi, igjen ved hjelp av B5, at $Ba(K(x,y),z)$. Dette er hva vi ønsker.

Dette avslutter vårt bevis for påstanden. **QED**.

Etter at vi nå relativt utførlig har definert akseptanseteorien B;1 skal vi i de neste paragrafen gi en nøyere analyse av den og også studere nærmere hvordan den kan aksiomatiseres på andre måter.

© Morten Harboe Rognes 2013

§6 Utvalgsstrukturer

De følgende fire definisjoner er hentet fra Hansson [1]. Vi starter med begrepet 'utvalgsstruktur'. Dette er definert på følgende måte:

Definisjon 6.1: En utvalgsstruktur er et triple <E,V,f> som oppfyller de følgende krav:

(i) E er en ikke-tom mengde
(ii) V Inkl Pt(E). V er altså en mengde av delmengder av E
(iii) Func(f) & Dom(f) = V
(iv) (Ax)(xêV → f(x) Inkl x)
(v) (Ax)(xêV → f(x)≠ø)
(vi) (Ax)(Ay)(x,yêV & x Inkl y & f(y)Ω x ≠ø → f(y) Ω x= f(x)

Er <E,V,f> en utvalgsstruktur kaller vi f utvalgsfunksjonen i L. Som man ser er dette en funksjon der domenet er en mengde av delmengder av E. Dessuten ser man at f, for ethvert element x i domenet, tilordner dette en ikke-tom delmengde av x. Med andre ord er f en utvalgsfunksjon over V som til ethvert mengde i domenet velger ut en ikke-tom delmengde av denne mengden. Denne utvalgsfunksjonen må tilfredstille kravet (vi). Dette kravet har, som man sikkert iaktar, en viss likhet med aksiomet B8 i teorien B;1. Vi skal kalle det for "Arrows aksiom", eller "Arrow-kravet". Er x et element i V kan f(x) i en viss forstand oppfattes som de "beste" elementene i x. Det bør bemerkes at definisjonen ovenfor er rent mengdeteoretisk. De enkelte kravene (i) - (vi) kan formaliseres som setninger innenfor den rent mengdeteoretiske delen av teorien B;1.

Den neste definisjon fastsetter hva som menes med at en utvalgsstruktur er en utvidelse av en annen. Også dette begrepet er rent mengde-teoretisk:

Definisjon 6.2: Anta <E, V1,f1> og <E,V2,f2> er to utvalgsstrukturer. Da kaller man <E,V2,f2> for en utvidelse av <E,V1,f1> hvis og bare hvis strukturene oppfyller de følgende krav:

(i) V1 Inkl V2
(ii) (Ax)(xê V1 → f1(x) = f2(x))

I en utvalgsstruktur <E,V,f> kan man kalle E for elementene i strukturen, V for domenet og f for utvalgsfunksjonen. Drsom en utvalgsstruktur skal være en utvidelse av en annen, må altså elementene i de to strukturene være det samme, domenet i utvidelsen må inkludere domenet i den strukturen som blir utvidet og utvalgsfunksjonen i den utvidete struktur må falle sammen med utvalgsfunksjonen i den strukturen som blir utvidet for alle elementene i dens domene.

I det følgende spiller *preferanserelasjoner* en meget fremtredende rolle. Dette er et rent mengdeteoretisk begrep og definert slik:

Definisjon 6.3: R er en preferanserelasjon over mengden X hvis og bare hvis:

(i) R Inkl XxX
(ii) (Ax)(Ay)(x,yêX → xRy v yRx

© Morten Harboe Rognes 2013

(iii) $(Ax)(Ay)(Az)(x,y,z \hat{e} X \rightarrow (xRy \,\&\, yRz \rightarrow xRz))$

Man ser at en preferanse relasjon over en mengde er en total og transitiv relasjon over mengden. At en relasjon er total innebærer at kravet (i) ovenfor er oppfylt, med andre ord at man har xRy eller yRx for alle elementer x,y i domenet til R. Fra dette følger at R er refleksiv for alle elementer i domenet. Det er også lett å vise at en preferanserelasjon over X ordner alle elementene i X i en mengde av innbyrdes disjunkte nivåer som er strengt lineært ordnet.

Er R en preferanserelasjon over X nevner vi at R* og L(R) er definert ved henholdsvis

$R^* = Mg(\langle x,y\rangle : x,y \hat{e} X \,\&\, xRy \,\&\, \neg(yRx))$
$L(R) = Mg(\langle x,y\rangle : x,y \hat{e} X \,\&\, xRy \,\&\, yRx)$

Vi definerer nå hva som menes med at en preferanserelasjon er en underliggende preferanserelasjon til en utvalgsstruktur.

Definisjon 6.4: Anta <E,V,f> er en utvalgsstruktur og R en preferanserelasjon over E. Da kalles R for en *underliggende preferanserelasjon til* <E,V,f> hvis og bare hvis
(i) $(Ay)(y \hat{e} V \rightarrow (Ax)(x \hat{e} f(y) \leftrightarrow (x \hat{e} y \,\&\, (Az)(z \hat{e} y \rightarrow xRz))))$

Noen kommentarer kan være på sin plass her. Anta R er en preferanserelasjon over mengden E og anta at y er en delmengde av E. La oss anta akkurat her at vi kan lese "xRy" som "x er minst like bra som y". Har vi da at (1) $x \hat{e} y \,\&\, (Az)(z \hat{e} y \rightarrow xRz)$ innebærer dette at x er et element i y som er minst like bra som ethvert annet element i y. Sagt på en annen måte vil dette si at x er et maksimalt element i y. Det kan ikke finnes noe element i y under disse forutsetninger som er strengt bedre enn y. For var for eksempel z0 et element i y der vi hadde $z0Rx \,\&\, \neg(xRz0)$ ville dette stride mot (1). Vi kan altså konkludere med at alle de x som oppfyller kravet (1) utgjør de R-maksimale elementene i y. Definerer vi Max(R,y) ved:
$Max(R,y) = Mg(x: x \hat{e} y \,\&\, (Az)(z \hat{e} y \rightarrow xRz))$ ser man at kravet (i) i definisjonen ovenfor innebærer at f(y) er de R-maksimale elementene i y for ethvert element y som er med i domenet til funksjonen f. Man kan derfor si, gitt forutsetningene i Definisjon 6.4, at R er en underliggende preferanserelasjon til utvalgsstrukturen <E,V,f> hvis og bare hvis man har for ethvert element y som er med i domenet til utvalgsfunksjonen f at f(y) er identisk med mengden av de R-maksimale elementene i y.

La oss nå formulere den følgende sats som er hentet fra og bevist i Hansson [1]:

Teorem 6.1: (Hanssons teorem) Anta <E,V,f> er en utvalgsstruktur. Da er følgende tre påstander ekvivalente:

(a) Det finnes en preferanserelasjon over E som er en underliggende preferanserelasjon til <E,V,f>
(b) Det finnes en utvalgsstruktur <E, V1,f1> som er en utvidelse av <E,V,f> og der man har $(Ax)(Ay)(x,y \hat{e} V1 \rightarrow xUy \hat{e} V1)$. Med andre ord er domenet til utvalgsfunksjonen i utvidelsen lukket under endelig union.
(c) Det finnes en utvalgsstruktur <E,V1,f1> som er en utvidelse av <E,V,f> og som er slik at V1 inneholder enhver endelig delmengde av E.

© Morten Harboe Rognes 2013

Det bør bemerkes at dette er en rent mengdeteoretisk eller algebraisk sats som kan formaliseres og bevises innenfor den mengdeteoretiske delen av B;1. Den er med andre ord et teorem i ZFC;u(L;e(Δ;1)) og derfor selvfølgelig et teorem i B;1. Selve beviset er som nevnt gitt i Hansson [1].

Vi skal nå vise hvordan man innenfor rammen av B;1 kan definere en bestemt utvalgsstruktur ved hjelp av akseptanserelasjonen Ba. For dette formål definerer vi først, om x er et utsagn, k(x). Uttrykket "k(x)" kan leses "det utsagn hvis sannhetsmengde er nøyaktig de epistemisk sett ideelle verdenene i x". Definisjonen er som følger:

Definisjon 6.5: Anta xêU. Da setter vi:
k(x) = SNu(Mg(y: Ba(y,x)))

Fra denne definisjonen ser man at k(x) er konjunksjonen av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til x. Sannhetsmengden til k(x) er som det fremgår fra denne definisjonen og våre tidligere bemerkninger nøyaktig de epistemisk sett ideelle elementene i x.

Vår neste definisjon er den følgende:

Definisjon 6.6: Q= Mg(y: y Inkl I & (Ex)(xêU & Ba(x, μ;-1(y))))

Er y en mengde med mulige verdener vil y alltid være sannhetsmengden til et, av y entydig bestemt, utsagn x. Dette utsagnet betegner vi med μ;-1(y). Q er altså alle de delmengder av I som er sannhetsmengder til utsagn som noe bør aksepteres relativt til.

Tilslutt definerer vi en funksjon f0 ved:

Definisjon 6.7: f0 = Mg(<x, μ(k(μ;-1(x)))>: xê Q)

Fra denne definisjonen fremgår det at domenet til f0 er Q, med andre ord mengden av alle de delmengder av I som er sannhetsmengder til utsagn som noe bør aksepteres relativt til. Er xêQ har vi derfor at μ;-1(x) er et utsagn der vi har Ba(z,μ;-1(x)) for noe z. Videre har vi da at f0(x) er μ(k(μ;-1(x))), som nettopp, i lys av våre tidligere forklaringer, er de epistemisk sett ideelle verdenene i utsagnet μ;-1(x).

Man kan nå vise at <I,Q,f0> er en utvalgsstruktur. Dette bevises naturligvis innenfor rammen av B;1 og er derfor et teorem i teorien B;1. Satsen er altså denne:

Teorem 6.2: <I,Q, f0> er en utvalgsstruktur.

Bevis: Fra definisjonen av Q fremgår det umiddelbart at (1) Q Inkl Pt(I). Anta nå at (2) xêQ. Vi ønsker å vise at f0(x) Inkl x. Fra (2) har vi ved hjelp av definisjonen av Q at (3) x Inkl I & (Er)(rêU & Ba(r, μ;-1(x))). Fra definisjonen av f0 fremgår det at det vil være tilstrekkelig å vise (3.1) μ(k(μ;-1(x)) Inkl x for å vise at f0(x) Inkl x. I lys av definisjonen av k vil det være tilstrekkelig å bevise (4) μ(SNu(Mg(r: Ba(r,μ;-1(x))))) Inkl x for å vise at (3) holder. Nå har man fra (3) at (5) Ba(r,μ;-1(x)) for noe rêU. Sett per definisjon:

α = Mg(r : Ba(r,μ;-1(x)). Da har man M(α), ie at α er en mengde, og at α≠ø & α Inkl Mg(r : Ba(r,μ;-1(x)). Ved hjelp av aksiom B5 har vi da Ba(SNu(α), μ;-1(x)).

© Morten Harboe Rognes 2013

Fra dette og B6 følger K(SNu(α), μ;-1(x)) ≠ μ;-1(ø), og herav: μ(SNu(α)) ≠ø. Fra dette siste og definisjonen av α følger: μ(SNu(Mg(r: Ba(r,μ;-1(x))))≠ø: Dette innebærer at i lys av definisjonene av f0 og operasjonen k at f0(x)=μ(k(μ;-1(x))) ≠ø. Vi har så langt vist:

(6) f0(x)≠ø. Ved hjelp av aksiom B9 og (5) har vi Ba(μ;-1(x), μ;-1(x)). Det følger fra dette og definisjonen av α at μ;-1(x)êα og derfor μ(SNu(α)) Inkl μ(μ;-1(x)) = x. Men da har man: (7) μ(SNu(Mg(r: Ba(r,μ;-1(x))))) = μ(k(μ;-1(x))) =f0(x) Inkl x. Vi har nå vist:

(8) (Ax)(xêQ → ø≠f0(x) Inkl x)

Fra definisjonen av f0 fremgår det umiddelbart at (9) Func(f0) & Dom(f0)=Q

Anta nå for vilkårlige x,y at (10) x,yêQ & x Inkl y & f0(y)Ωx≠ø. Fra den første konjunkten her og definisjonen av Q følger eksistensen av r1 og r2 slik at

(11) x Inkl I & r1êU & Ba(r1, μ;-1(x))

(12) y Inkl I & r2êU & Ba(r2, μ;-1(y))

Fra den andre konjunkten i (10) følger (13) μ(μ;-1(x)) Inkl μ(μ;-1(y)). Dessuten følger fra (11) og (12) og aksiom B2 at μ;-1(x) og μ;-1(y) er utsagn. Fra den siste komponenten i (10) og definisjonen av f0 kan man slutte: μ(k(μ;-1(y)) Ω x ≠ø. Dette innebærer at

μ(SNu(Mg(r: Ba(r,μ;-1(y))))) Ω x ≠ø Fra dette følger

(14) Cons(Mg(r: Ba(r,μ;-1(y))) U { μ;-1(x)})

Fra (11), (12), (13) og (14) kan man ved hjelp av aksiom B8 slutte:

K(SNu(Mg(r: Ba(r,μ;-1(y)))), μ;-1(x)) = SNu(Mg(r: Ba(r,μ;-1(x))))

Men ved hjelp av definisjonen av f0 følger herav at f0(y)Ωx = f0(x). Vi har dermed vist:

(15) (Ax)(Ay)(x,yêQ & x Inkl y & f0(y)Ωx≠ø → f0(y)Ωx = f0(x))

Fra (1), (8), (9) og (15) følger det <I,Q,f0> er en utvalgsstruktur. **QED**.

Man kan ganske lett vise at Q inneholder enhver ikke-tom, endelig mengde med mulige verdener. Vi har altså:

Teorem 6.3: Q inneholder enhver endelig, ikke-tom delmengde av I.

Bevis: Vi må vise: (1) (Ax)(M(x) & x Inkl I & ø≠Card(x)< Aleph;0 → xêQ)
Anta derfor for vilkårlig x at

(2) M(x) & x Inkl I & ø≠Card(x)< Aleph;0.

Fra dette følger :

μ;-1(x)êU & ø≠ Card(μ(μ;-1(x))) < Aleph;0.

Herav kan man ved hjelp av B11 slutte at det finnes r slik at rêU & Ba(r, μ;-1(x)). Dette forhold og definisjonen av Q berettiger en til å slutte at xêQ. Dette viser at påstanden holder. **QED**.

Fra Teorem 6.2 og Teorem 6.3 kan man utlede følgende sats:

Teorem 6.4: Det finnes en preferanserelasjon R over I som er en underliggende preferanserelasjon til utvalgsstrukturen <I,Q, f0>.

Bevis: Vi har at <I,Q,f0> er en utvalgsstruktur der Q inneholder enhver endelig delmengde av I. Siden enhver utvalgsstruktur er en utvidelse av seg selv følger satsen fra det forhold at punkt (c) i Hanssons teorem, ie. Teorem 6.,1 impliserer punkt (a) i dette teoremet. **QED**.

© Morten Harboe Rognes 2013

La oss før vi går videre definere uttrykket "Max(R,x)". Vi forutsetter her at R er en relasjon og x en mengde. Definisjonen er denne:

Definisjon 6.8: Max(R,x) = Mg(z: zêx & (Ay)(yêx →zRy))

Ved hjelp av Teorem 6.4 kan man nå utlede det følgende viktige resultat som kaster lys over akseptanserelasjonen Ba:

Teorem 6.5: Anta R er en preferanserelasjon over I som er en underliggende preferanserelasjon til utvalgsstrukturen <I,Q,f0>. Da oppfyller R følgende krav:
(Ax)((Ez)Ba(z,x). → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))

Bevis: Anta (1) R er en preferanserelasjon over I og (2) R er en underliggende preferanserelasjon til <I,Q,f0>. Fra (2) og definisjonen av hva som menes med en underliggende preferanserelasjon, Definisjon 6.4 følger:
(3) (Ax)(xêQ → (Az)(zêf0(x) ↔. zêx & (Ay)(yêx→ zRy)))
Vi må nå vise at formelen i Teorem 6.5 lar seg utlede. Med andre ord må vi vise:
(+) (Ax)((Ez)(Ba(z,x) → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))
Først tar vi for oss halvdelen mot høyre i denne formelen:
(A) Anta for vilkårlige x og y at (4) (Ez)(Ba(z,x)) og (5) Ba(y,x). Fra (4) og definisjonen av Q følger (6) μ(x) êQ. Fra dette og (3) har man:
(7) (Az)(zêf0(μ(x)) ↔. zêμ(x) & (Ay)(yêμ(x) → zRy))
Fra (5) følger yêMg(z: Ba(z,x)) og derfor {y} Inkl Mg(z: Ba(z,x)). Fra dette følger videre: μ(SNu(Mg(z:Ba(z,x)))) Inkl μ(SNu({y})) =μ(y). Men fra definisjonen av operasjonen k har vi at k(x)= SNu(Mg(z:Ba(z,x))). Det følger at (8) μ(k(x)) Inkl μ(y). Ved hjelp av definisjonen av f0 følger (9) f0(μ(x)) = μ(k(μ;-1(μ(x)))) = μ(k(x)). Fra (8) og (9) følger: (10) f0(μ(x)) Inkl μ(y). Nå har vi imidlertid fra (7) ved hjelp av definisjonen av "Max(R,α)":
(11) f0(μ(x)) = Mg(z: zêμ(x) & (Ay)(yêμ(x) → zRy)) = Max(R, μ(x))
Fra (5) og B2, samt (11) og (10) følger så det vi ønsker, nemlig
x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y).
Dette viser at halvdelen mot høyre i (+) holder.
(B) Vi må imidlertid også vise halvedelen mot venstre i (+). Anta derfor for vilkårlige x,y at (12) (Ez)Ba(z,x) & x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y). Siden R er en underliggende preferanserelasjon over <I,Q,f0> følger
(13) (Ax)(xêQ → (Az)(zêf0(x) ↔. zêx & (Ay)(yêx→ zRy)))
Fra (12) og definisjonen av μ(x)êQ og vi har derfor i lys av (13):
(14) (Az)(zêf0(μ(x)) ↔. zêμ(x) & (Ay)(yêμ(x)→ zRy)) Herav har vi ved hjelp av definisjonen av Max:
(15) f0(μ(x)) = Max(R,μ(x)). Fra dette og den siste konjunkten i (12) utleder vi: f0(μ(x)) Inkl μ(y). I lys av definisjonen av f0 innebærer dette:
(16) μ(SNu(Mg(r: Ba(r,x)))) Inkl μ(y).
La oss per definisjon sette α= Mg(r: Ba(r,x)). Da har vi at α er en ikke-tom mengde siden det fra (12) og B9 følger at Ba(x,x). Dessuten har vi at α Inkl Mg(r: Ba(r,x)). Det følger derfor ved hjelp av B5 at vi har: (17) Ba(SNu(α),x). Men fra (16) og definisjonen av α følger: (18) μ(SNu(α)) Inkl μ(y). Fra dette, (17) og B3 følger da Ba(y,x). Dette viser at halvdelen mot venstre i (+) også holder.

© Morten Harboe Rognes 2013

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det følgende er en umiddelbar følgesetning til Teorem 6.4 og Teorem 6.5:

Korollar 6.5.1: Det finnes en preferanserelasjon R over I som oppfyller kravet:
(Ax)((Ez)Ba(z,x). → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))

Vi har ovenfor vist at det finnes en underliggende preferanserelasjon til utvalgsstrukturen <I,Q,f0>. Det er imidlertid mulig å vise at det bare finnes én slik relasjon, med andre ord at denne preferanserelasjonen er entydig bestemt:

Teorem 6.6: Det finnes en entydig bestemt preferanserelasjon R over I som er en underliggende preferanserelasjon til utvalgsstrukturen <I,Q, f0>.

Bevis: Fra Teorem 6.4 fremgår det at det finnes en preferanserelasjon R over I som er en underliggende preferanserelasjon til utvalgsstrukturen <I,Q, f0>. Anta nå at det fantes to slike underliggende preferanserelasjoner R;1 og R;2 der vi har (+) R;1 ≠ R;2.

Fra definisjonen av hva som menes med en underliggende preferanserelasjon, Definisjon 6.4 følger:

(1) (Ax)(xêQ → (Az)(zêf0(x) ↔. zêx & (Ay)(yêx → zR;1 x)))
(2) (Ax)(xêQ → (Az)(zêf0(x) ↔. zêx & (Ay)(yêx → zR;2 x)))

Fra (+) følger det at det må finnes a,b slik at enten (3) <a,b>êR;1 & ¬(<a,b>êR;2) eller (4) ¬(<a,b>êR;1) & <a,b>êR;2. Vi ser bare på det første av disse to tilfellene, siden beviset i det andre tilfellet blir helt likt. Fra (3) følger (4) a≠b. For hadde vi a=b ville vi ha (5) ¬(<a,a>êR;2). Men fra definisjonen av en preferanserelasjon R over X fremgår det at vi har (6) (Ax)(Ay)(x,yêX →. xRy v yRx)). Anta x er vilkårlig element i X, ie xêX. Da følger ved hjelp av (6) at (Ay)(yêX → xRy v yRx). Herav følger så ved instansiering med hensyn på y: xRx v xRx, med andre ord at xRx. Siden x var et vilkårlig element i X følger at enhver preferanserelasjon R over X oppfyller kravet: (Ax)(xêX → xRx). Det følger at (5) er absurd og at (4) derfor holder.

Siden Q inneholder enhver endelig delmengde av I har vi at (6) {a,b}ê Q. Fra dette, (1) og (2) kan man slutte:

(7) (Az)(zêf0({a,b}) ↔. zê{a,b} & (Ay)(yê{a,b} → zR;1 x)))
(8) (Az)(zêf0({a,b}) ↔. zê{a,b} & (Ay)(yê{a,b} → zR;2 x)))

Ved hjelp av definisjonen av "Max(R,α)" følger herav:

(9) Max(R;1, {a,b}) = Max(R;2,{a,b})

Det er nå to muligheter når det gjelder paret <b,a>.

Tilfelle (i): <b,a>êR;1. Da har vi ved hjelp av (3) <a,b>,<b,a>êR;1 og derfor Max(R;1,{a,b})= {a,b}. På den annen side følger fra (3) at ¬(<a,b>êR;2). Siden R;2 er en preferanserelasjon, og derfor total, ie vi har <x,y>êR;2 v <y,x>êR;2 for alle x,yêI, følger det at <b,a>êR;2. Det følger da at Max(R;2,{a,b}) = {b}. Siden a≠b følger det i dette tilfelle at Max(R;1, {a,b}) ≠ Max(R;2,{a,b}). Dette strider mot (9)

Tilfelle (ii): ¬(<b,a>êR;1). Da har vi <a,b>êR;1 & ¬(<b,a>êR;1). Det følger at vi i dette tilfellet må ha Max(R;1,{a,b}) ={a}. På den annen side følger fra (3) at <b,a>êR;2 & ¬(<a,b>êR;2). I såfall kan man slutte at Max(R;2, {a,b}) ={b}. Men siden a≠b har vi også i

© Morten Harboe Rognes 2013

dette tilfellet Max(R;1, {a,b}) ≠ Max(R;2,{a,b}). Dette strider mot (9)

I begge tilfellene kan vi utlede en motsigelse. Det følger at (+) ikke kan holde og at den underliggende preferanserelasjonen over <I,Q,f0> er entydig bestemt. **QED**.

Korollar 6.5.1 sier at et finnes en preferanserelasjon R over I som oppfyller følgende krav:

(+) (Ax)((Ez)Ba(z,x). → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))

Man kan i denne forbindelse spørre om denne preferanserelasjonen over I er entydig bestemt, med andre ord om det er slik at dersom R;1 og R;2 er preferanserelasjoner over I som oppfyller kravet (+) er R;1= R;2.

Dette lar seg faktisk vise. Det følgende teorem uttrykker denne påstand:

Teorem 6.7: Det finnes en entydig bestemt preferanserelasjon R over I som oppfyller det følgende krav:

(+) (Ax)((Ez)Ba(z,x). → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))

Bevis: Vi allerede har vist at det finnes en preferanserelasjon R over I som oppfyller kravet (+). For å bevise satsen vil det være tilstrekkelig å vise:

(1) Dersom R er en preferanserelasjon over I som oppfyller (+) vil R også være en underliggende preferanserelasjon til <I,Q, f0>.

For anta R;1 og R;2 var preferanserelasjoner som oppfyller kravet (+). Da har vi ifølge (1) at R;1 og R;2 også er underliggende preferanserelasjoner til strukturen <I,Q,f0>. Men da kan vi ved hjelp av Teorem 6.6 konkludere med at R;1= R;2. Det er altså tilstrekkelig å vise at (1). Anta derfor: (2) R er en preferanserelasjon over I som oppfyller (+). For å vise at R er en underliggende preferanserelasjon til <I,Q,f0> er det tilstrekkelig å vise at:

(3) (Ax)(xêQ → f0(x) = Max(R,x))

Anta for vilkårlig x at (4) xêQ. Da har vi ved hjelp av definisjonen av Q at det finnes r slik at (4) rêU & Ba(r,μ;-1(x)). Siden R oppfyller (+) har vi da

(5) (Ay)(Ba(y,μ;-1(x)) ↔ yêU & Max(R,x) Inkl μ(y))

Fra dette følger (6) Mg(y: Ba(y,μ;-1(x))) = Mg(y: yêU & Max(R,x) Inkl μ(y))

I sin tur følger fra dette:

(7) μ(SNu(Mg(y: Ba(y,μ;-1(x))))) = μ(SNu(Mg(y: yêU & Max(R,x) Inkl μ(y))))

Men vi har :

(8) μ(SNu(Mg(y: yêU & Max(R,x) Inkl μ(y)))) =
SN(y: yêPt(I) & Max(R,x) Inkl y) = Max(R,x).

Ved hjelp av definisjonen av f0 har man:

(9) f0(x) = μ(SNu(Mg(y: Ba(y,μ;-1(x))))))

Fra (7), (8) og (9) følger derfor f0(x) = Max(R,x). Men x var vilkårlig element i Q ifølge (4). Det følger at (3) holder. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED**.

Studerer man beviset for dette teoremet ser man at vi har bevist påstand (1) i dette beviset. Dette kan oppføres som et eget teorem:

Teorem 6.8: Anta R er en preferanserelasjon over I som oppfyller det følgende krav:

(+) (Ax)((Ez)Ba(z,x). → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))

© Morten Harboe Rognes 2013

Da er R en underliggende preferanserelasjon til <I,Q, f0>.

Bevis: Se beviset for Teorem 6.7. I dette beviset beviser vi formelen (1) som sier nøyaktig det som påstås i Teorem 6.8. **QED**.

Er R en preferanserelasjon over I definerer vi R* ved
xR*y ↔. xRy & ¬(yRx).
Hvis "xRy" uformelt leses "x er bedre enn y" så kan "xR*y" leses "x er strengt bedre enn y". Man ser umiddelbart at dersom R er en preferanserelasjon over mengden X så er R* en transitiv, asymmetrisk relasjon over X. Videre har vi at xR*y v x=y v yR*x holder for alle x,yêX.

Gitt denne definisjonen av R* kan vi nå formulere den følgende sats:

Teorem 6.9: Anta R er en preferanserelasjon over I som er en underliggende preferanserelasjon til utvalgsstrukturen <I,Q,f0>. Da har vi:
(Aw)(wêI → (Ew')(w'êI & wR*w'))

Som man ser sier denne satsen at dersom R er en underliggende preferanserelasjon til <I,Q,f0> finnes det en uendelig nedadstigende sekvens av mulige verdener w;0,w;1,w;2, ... etc. der vi har at w;n R* w;(n+1) for alle naturlige tall n.

Bevis: Anta forutsetningen i satsen holder. Da følger ved hjelp av Teorem 6.5 at
(1) (Ax)((Ez)(Ba(z,x) → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))
Anta nå for vilkårlig w at (2) wêI. Da følger ved hjelp av B10 at det finnes y der:
(3) yêU & Card(μ(y)) >=2 & Ba(μ;-1({w}), y))
Fra den siste konjunkten og B6 følger også at μ(y) og μ;-1({w}) er konsistente. Det må derfor finnes en verden hvor begge utsagnene er sanne. Dette impliserer åpenbart at (4) wêμ(y). Siden kardinaltallet til μ(y) er større enn 2, ifølge den andre konjunkten i (3) og wêy, må det finnes noe w'êI slik at (5) w'≠ w & w'êy. Vi har da har da (6) {w,w'} Inkl μ(y). Fra den siste konjunkten i (3) følger ved hjelp av definisjonen av Q at (7) μ(y)êQ. Det følger dessuten ved hjelp av (1) at
(8) Max(R,μ(y)) Inkl {w}
Fra (7) følger også (9) ø≠f0(μ(y)) = Max(R,μ(y)), siden R er en underliggende preferanserelasjon til <I,Q,f0>. Fra (8) og (9) kan man slutte:
(10) ø ≠ Max(R,μ(y)) Inkl {w}. Herav følger (11) Max(R,μ(y)) = {w}. Vi må, siden wêI og R er en preferanserelasjon over I, ha at (12) wRw' v w'Rw. Anta for reduktio at w'Rw. Fra (11) følger (13) (Az)(zêμ(y) → wRz). Men w'êμ(y), og fra (13) og det at w'Rw, følger (Az)(zêμ(y) → w'Rz). Da må vi ha w'êMax(R,μ(y)) og følgelig w'=w. Det er absurd siden w'≠w. Det følger at ¬(w'Rw). Fra dette og (12) kan man slutte wRw'. Men da har vi wRw' & ¬(w'Rw) og derfor wR*w'. Siden w'êI følger (Ew')(w'êI & wR*w'). Dette viser at satsen holder. **QED**.

Vi vender oss nå til det følgende teorem som er viktig for den videre utvikling.

Teorem 6.10:
(a) Anta R er en preferanserelasjon over I som oppfyller det følgende krav:

© Morten Harboe Rognes 2013

(++) (Ax)(Ay)(Ba(y,x) ↔. x,yêU & ø≠Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))

Da oppfyller R også det følgende krav:

(+) (Ax)((Ez)(Ba(z,x)) → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))

(b) Anta R er en preferanserelasjon over I som oppfyller det følgende krav:

(+) (Ax)((Ez)(Ba(z,x)) → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))

Da oppfyller R også det følgende krav:

(++) (Ax)(Ay)(Ba(y,x) ↔. x,yêU & ø≠Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) R er en preferanserelasjon over I og at R oppfyller kravet (++). Vi må vise at R også oppfyller kravet (+).

Vi viser først at halvdelen mot høyre i (+) holder. Anta derfor for vilkårlige x,y at (2) (Ez)(Ba(z,x)) & Ba(y,x). Fra den siste konjunkten og (++) følger umiddelbart det vi ønsker, nemlig: (3) x,yêU & ø≠Max(R,μ(x)) Inkl μ(y).

La oss så se på halvdelen mot venstre i (+): Anta for vilkårlige x,y

(4) (Ez)Ba(z,x) & x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y). Fra den første konjunkten her følger (5) Ba(z,x) for noe z. Fra dette og (++) følger så: ø≠Max(R,μ(x)) Inkl μ(z). Men herav har vi (6) ø≠ Max(R, μ(x)). Sammen med de to siste konjunktene i (4) følger da:

(5) x,yêU & ø≠Max(R,μ(x)) Inkl μ(y). Men dette sammen med (++) impliserer åpenbart det vi ønsker, nemlig Ba(y,x). Dette viser at halvdelen mot venstre i (+) holder om (++) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): Anta (1) at R er en preferanserelasjon over I og anta dessuten at R oppfyller kravet (+), med andre ord:

(2) (Ax)((Ez)(Ba(z,x)) → (Ay)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))))

Vi må da vise at vi har (++) (Ax)(Ay)(Ba(y,x) ↔. x,yêU & ø≠Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))

(I) Vi viser først kondisjonalen mot høyre i (++). Anta derfor for vilkårlige x,y at (3) Ba(y,x). Da har man naturligvis (Ez)Ba(z,x) og derfor ved hjelp av (+) at

(4) x,yêU & Max(R,μ(x)) Inkl μ(y). Det gjenstår imidlertid å vise at Max(R,μ(x))≠ø. Siden R er en preferanserelasjon over I som oppfyller kravet (+) følger ved hjelp av Teorem 6.8 at R er en underliggende preferanserelasjon til utvalgsstrukturen <I,Q,f0>. Dette i sin tur impliserer at vi har (5) (Ax)(xêQ → ø≠ f0(x)). Siden B(y,x) har vi ved hjelp av definisjonen av Q at (6) μ(x)êQ. Det følger da ved hjelp av (5) at (7) ø≠ f0(μ(x)). Men siden R er en underliggende preferanserelasjon til <I,Q, f0> følger det at (Ax)(xêQ → (Az)(zêf0(x) ↔. zêx & (Ay)(yêx → zRy))). Fra dette følger at (Ax)(xêQ → f0(x) = Max(R,x)). I sin tur impliserer dette og (6) at (8) f0(μ(x))= Max(R,μ(x)). Herav kan man så ved hjelp av (7) slutte at ø≠ Max(R,μ(x)). Dermed har vi bevist at kondisjonalen mot høyre i (++) holder.

(II) La oss nå ta for oss kondisjonalen mot venstre i (++).

Anta (9) x,yêU & ø≠Max(R,μ(x)) Inkl μ(y). For å vise at B(y,x) ser man at det vil være tilstrekkelig å vise (10) (Ez)Ba(z,x), fordi (10) og (9) sammen med (+) impliserer Ba(y,x).

Anta for reduktio ad absurdum at (11) ¬(Ez)(Ba(z,x)). Vi skal altså vise at dette leder til en motsigelse. Fra (11) og B12[6] følger da:

6 Merk at dette er første gangen vi trekker inn aksiomet B12 i våre bevis. I ingen andre av satsene som vi så langt har bevist har det vært noe behov for bruke dette aksiomet.

© Morten Harboe Rognes 2013

(12) $(Aw)(w\hat{e}\mu(x) \rightarrow (Ew')(w'\hat{e}\mu(x) \& w' \neq w \& Ba(\mu;-1(\{w'\}), \mu;-1(\{w',w\}))))$

Anta nå for vilkårlig w;1 at (13) $w;1\hat{e}\mu(x)$. Fra dette og (12) kan man utlede at det må finnes w;2 der vi har:

(14) $w;2\hat{e}\mu(x) \& w;2 \neq w;1$ og

(15) $Ba(\mu;-1(\{w;2\}), \mu;-1(\{w;2,w;1\}))$

Nå har vi allerede vist at halvdelen mot høyre i (++) holder. Vi har derfor:

(16) $(Ax)(Ay)(Ba(y,x) \rightarrow \emptyset \neq Max(R,\mu(x)) \text{ Inkl } \mu(y))$

Fra dette og (15) følger:

(17) $\emptyset \neq Max(R, \mu;-1(\{w;2,w;1\})) \text{ Inkl } \{w;2\}$ Fra dette følger :

(18) $Max(R, \mu;-1(\{w;2,w;1\})) = \{w;2\}$

Anta w;1 R w;2. Siden w;1 R w;1 ville vi da ha $w;1\hat{e}Max(R, \mu;-1(\{w;2,w;1\}))$. Men da $w;1\hat{e}\{w;2\}$ og derfor w;1=w;2. Men dette strider mot (14). Vi har derfor (19) ¬(w;1Rw;2) og derfor siden R er total at w;2Rw;1. Det følger at (20) w;2R*w;1. Fra dette og (14) følger:

(21) $w;2\hat{e}\mu(x) \& w;2 \neq w;1 \& w;2R^*w;1.$ og derfor:

(22) $(Ew;2)(w;2\hat{e}\mu(x) \& w;2 \neq w;1 \& w;2R^*w;1)$

Men w;1 var et vilkårlig objekt slik at (13). Det følger derfor at

(23) $(Aw;1)(w;1\hat{e}\mu(x) \rightarrow (Ew;2)(w;2\hat{e}\mu(x) \& w;2 \neq w;1 \& w;2R^*w;1))$

Fra (9) følger $\emptyset \neq Max(R,\mu(x))$. Dette impliserer at det finnes w0 der man har

(24) $w0\hat{e}\mu(x) \& (Ay)(y\hat{e}\mu(x) \rightarrow w0Ry)$

Fra (23) og (24) følger eksistensen av w;3 der:

(25) $w;3\hat{e}\mu(x) \& w;3 \neq w0 \& w;3R^*w0$

Fra (24) og (25) følger imidlertid w0Rw;3 som sammen med w;3R*w0 åpenbart gir oss en motsigelse. Dette viser at (11) ikke holder og avslutter dermed vårt bevis for satsen. **QED**.

La oss nå forsøke å sammenfatte det vi har bevist. Vi betrakter de følgende betingelser:

(1) R er en preferanserelasjon over I som er en underliggende preferanserelasjon til utvalgsstrukturen <I,Q,R>

(2) R er en preferanserelasjon over I som oppfyller kravet

(+) $(Ax)((Ez)(Ba(z,x)) \rightarrow (Ay)(Ba(y,x) \leftrightarrow (x,y\hat{e}U \& Max(R,\mu(x)) \text{ Inkl } \mu(y))))$

(3) R er en preferanserelasjon over I som oppfyller kravet

(++) $(Ay)(Ax)(Ba(y,x) \leftrightarrow (x,y\hat{e}U \& \emptyset \neq Max(R,\mu(x)) \text{ Inkl } \mu(y)))$

(4) $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ew')(w'\hat{e}I \& wR^*w'))$

Vi forkorter disse tre betingelsene med henholdsvis "C1(R)", "C2(R)", "C3(R)" og "C4(R)". Den siste satsen vi har vist sier da intet annet enn at C2(R) ↔ C3(R) holder for enhver relasjon R. Ser man på Teorem 6.5 uttrykker dette teoremet at for enhver relasjon R har man C1(R) → C2(R) . Videre uttrykker Teorem 6.8 at C2(R) → C1(R) holder for alle relasjoner R. Studerer man videre Teorem 6.6 sier dette teoremet at C1(R') & C1(R) → R'=R for alle relasjoner R' og R. Når det gjelder Teorem 6.4 sier denne satsen at det finnes en R slik at C1(R). Endelig sier Teorem 6.9 at C1(R) → C4(R) for alle R.

I lys av disse bemerkningene kan de resultater vi har vist sammenfattes konsist på følgende måte:

Teorem 6.11: (Hovedresultat I). For alle relasjoner R,R' har man:

© Morten Harboe Rognes 2013

(i) $C1(R) \leftrightarrow C2(R) \leftrightarrow C3(R)$
(ii) $C1(R) \,\&\, C1(R') \rightarrow R=R'$
(iii) $(ER)C1(R)$
(iv) $C1(R) \rightarrow C4(R)$

Det følger fra dette at det finnes en og bare en relasjon R slik at C1(R), og tilsvarende for de andre betingelsene C2 og C3. Som det fremgår av Rognes[1] bruker vi "(ix)F(x)" som forkortelse for "Det objektet x som er slik at F(x)". Vi har derfor at følgende holder:

Teorem 6.12: Man har:
$(iR)C1(R) = (iR)C2(R) = (iR)C3(R) = (iR)(C3(R) \,\&\, C4(R))$

Bevis: Dette følger umiddelbart fra Teorem 6.11. **QED**.

La oss før vi går videre bemerke at vi bruker uttrykket "Pref(R,X)" som forkortelse for "R er en preferanserelasjon over X". Som det fremgår av den definisjonen vi har gitt tidligere i denne paragrafen er begrepet preferanserelasjon et rent mengdeteoretisk begrep.

Alle de teoremene vi har nevnt ovenfor er teoremer som kan utledes i teorien B;1 slik vi definerte denne teorien i forrige paragraf. Satsene og definisjonene vi har nevnt kan derfor formaliseres fullstendig i språket til denne teorien.

Vi skal nå se på to nye grunnsetninger som det er naturlig å betrakte:

B13 $(E!R)(\, Pref(R, I) \,\&$
$(Ay)(Ax)(Ba(y,x) \leftrightarrow\ (x,y\hat{e}U \,\&\, \emptyset \neq Max(R,\mu(x))\ Inkl\ \mu(y))))$

Som man ser sier denne setningen intet annet enn at enn at det finnes en og bare en preferanserelasjon R over I som oppfyller kravet (++). Dette kravet har vi nevnt i forbindelse med tidligere teoremer. Det skulle være lett å se at B13 er en setning i språket til B;1.

Vi skal også betrakte den følgende grunnsetning:

B14 $(E!R)(Pref(R,I) \,\&$
$(Ay)(Ax)(Ba(y,x) \leftrightarrow\ (x,y\hat{e}U \,\&\, \emptyset \neq Max(R,\mu(x))\ Inkl\ \mu(y))) \,\&$
$(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ew')(w'\hat{e}I \,\&\, wR^*w')))$

Denne setningen uttrykker at det finnes en og bare en preferanserelasjon R over I som oppfyller kravet (++) og kravet $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ew')(w'\hat{e}I \,\&\, wR^*w'))$. Dette siste kravet innebærer at man for enhver verden w kan finne en annen verden w' hvor "w er strengt bedre enn w' ", såsant man tillater seg selv å lese uttrykket " w R w' " som "verdenen w er minst like bra som verdenen w'". Dette minner en om at det i forbindelse med det vi har sagt om preferanserelasjoner så langt, og spesielt den preferanserelasjonen som postuleres i B13 og B14, ikke er noe som tilsier en bestemt lesemåte av uttrykket " wRw' ". Den lesemåten som vi introduserte under presentasjonen av aksiomene B1 - B12, nemlig "w er en epistemisk sett minst like ideell verden enn w' " er muligens mer dekkende. Grunnen til dette er at $Max(R,\mu;-1(x))$ da vil være mengden av alle de verdenene i sannhetsmengden til utsagnet y som er minst like epistemisk ideelle som enhver annen verden i denne sannhetsmengden.

© Morten Harboe Rognes 2013

Max(R,μ;-1(y)) kan da sies å være de epistemisk sett ideelle verdenene i y.

Før vi går videre nevner vi også at grunnsetningen B13 kan oppfattes som en mer presis versjon av det vi kalte "enkelhetsprinsippet" i §1.

Språket til teorien B;1 er, som allerede nevnt,L;e(Δ;1). Dette er språket L;e(Δ) utvidet med "Ba(x,y)", "utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y", som eneste nye ikke-logiske predikat. I det følgende skal vi betrakte en annen aksiomatisering av B;1. Denne vil bli betegnet med "B;1*". Man får denne teorien om man utvider ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] med ytterligere to aksiomer, nemlig B2 og B14 ovenfor. Man kan altså presist definere teorien B;1* slik:

B;1* = ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0U{B2, B14}]

Er T en første-ordens teori, og både B;1 og B;1* er første-ordens teorier, betegner "Th(T)" mengden av teoremer i teorien T.

Det fremgår fra Teorem 6.11 at B14 er et teorem i B;1. Videre er åpenbart B2 er et teorem i B;1 siden det er et aksiom i denne teorien. Vi har derfor at enhver setning i L;e(Δ;1) som kan utledes i B;1* også kan utledes i B;1, med andre ord har vi Th(B;1*) inkl Th(B;1). Formelt kan dette stilles opp som et eget teorem:

Teorem 6.13: Th(B;1*) Inkl Th(B;1)

Man kan nå spørre om inklusjonen holder den andre veien. Er med andre ord alle teoremene i B;1 også teoremer i B;1* ? Vi skal vise at også denne påstanden, som uttrykkes av det følgende teorem, er riktig.

Teorem 6.14: Th(B;1) Inkl Th(B;1*)

Bevis: Det vil åpenbart være tilstrekkelig å vise at aksiomene B1 - B12 kan utledes i B;1* siden de øvrige aksiomene i de to teoriene er de samme, og de to teoriene har nøyaktig de samme slutningsreglene.

Ad B1: Anta (1) Ba(y,x) for vilkårlige utsagn x,y. Fra B14 følger eksistensen av en preferanserelasjon R over I der

(2) (Ax)(Ay)(Ba(y,x) ↔ x,yêU &ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))

Fra dette og (1) følger: (3) x,yêU &ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y). Nå har man μ(μ;1(I)) =I. Det følger derfor fra dette, det at μ(y) Inkl I og (3) at

(4) x,yêU &ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(μ;-1(y)). Fra dette og (2) følger så Ba(μ;-1(I),y). Dette viser at B1 kan utledes i B;1*.

Ad B2: Dette er trivielt siden B2 allerede er et aksiom i B;1*

Ad B3: Anta for vilkårlige x, y,z at (1) Ba(y,x) & zêU & μ(y) Inkl μ(z). Fra B14 følger eksistensen av en preferanserelasjon R over I der

(2) (Ax)(Ay)(Ba(y,x) ↔ x,yêU &ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))

Fra (2) og den første konjunkten i (1) følger: x,yêU &ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y)). Herav følger ved hjelp av den siste konjunkten i (1) at x,yêU &ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(z)). Dette og

© Morten Harboe Rognes 2013

(2) impliserer Ba(z,x). Man ser fra dette at B3 kan utledes i B;1*.

Ad B4: Anta at (1) Ba(x,y) for vilkårlige x,y. Fra B14 følger eksistensen av en preferanserelasjon R over I der

(2) (Ax)(Ay)(Ba(y,x) ↔ x,yêU &ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))

Anta for reduktio ad absurdum at (3) Ba(μ;-1(ø),x). Fra (1) og (2) følger (4) ø ≠ Max(R, μ(x)). Fra (3) og (2) følger Max(R,μ(x)) Inkl μ(μ;-1(ø))=ø. Men dette strider mot (4). det følger at ¬Ba(μ;-1(ø),x). Dette viser at B4 kan utledes i B;1*

Ad B5: Anta α er en mengde og at (1) ø≠α Inkl U og (2) (Ax)(xêα → Ba(x,y)). Fra B14 følger eksistensen av en preferanserelasjon R over I der

(3) (Ax)(Ay)(Ba(y,x) ↔ x,yêU &ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))

Ved hjelp av (2) og (3) kan man slutte:

(4) (Ax)(xêα → Max(R,μ(y)) Inkl μ(x)) Herav følger:

(5) (Ax)(xêα → (Aw)(wêMax(R,μ(y)) → wêμ(x))). Fra dette kan man i sin tur slutte: (6) (Aw)(wêMax(R,μ(y)) → (Ax)(xêα → wêμ(x))). Herav:

(Aw)(wêMax(R,μ(y)) → wêSN(Mg(μ(x): xêα)). Fra dette følger så visere: (Aw)(wêMax(Rμ(y)) → wêμ(SNu(α))) og derfor: (7) Max(R,μ(y)) Inkl μ(SNu(α)).

Fra (1) kan man slutte at det finnes x0êα. og derfor ved hjelp av (2) at Ba(x0,y). Fra dette og (3) følger ø≠Max(R,μ(y)) og dessuten yêU. Siden SNu(α)êU har man ved hjelp av (7) og (3) at Ba(SNu(α),y). Dette viser at B5 lar seg utlede i B;1*

Ad B6: Anta for vilkårlige x,y at (1) B(y,x). Som nevnt tidligere følger fra B14 eksistensen av en preferanserelasjon R over I der

(3) (Ax)(Ay)(Ba(y,x) ↔ x,yêU &ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y))

Fra (1) og (3) har man (4) ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y). Siden Max(R,μ(x))≠ø finnes wêI slik at wêMax(R,μ(x)). Da må wêμ(x), siden Max(R,μ(x)) Inkl μ(x). Dessuten har ved hjelp av (4) at wêμ(y). Det følger at det finnes wêμ(x)Ωμ(y). Herav følger at K(x,y)≠μ;-1(ø). Dette viser at B6 kan utledes

Ad B7: Anta (1) Ba(y,z) & Ba(x,K(y,z)). Som nevnt tidligere følger fra B14 eksistensen av en preferanserelasjon R over I der

(3) (Az)(Aw)(Ba(z,w) ↔ z,wêU & ø≠ Max(R,μ(w)) Inkl μ(z))

Fra (1) og (3) følger da:

(4.1) y,zêU & ø≠ Max(R,μ(z)) Inkl μ(y)

(4.2) x, K(y,z)êU & ø≠ Max(R, μ(y)Ωμ(z)) Inkl μ(x)

Det vi nå ønsker å vise er at (+) Max(R,μ(z)) Inkl μ(x). Anta derfor for vilkårlig w at (5) wêMax(R,μ(z)). Fra dette og (4.1) følger: (6) wêμ(y). Fra (5) følger:

(7) wêμ(z) & (Aw')(w'êμ(z) → wRw') Herav kan vi ved hjelp av (6) slutte:

(8) wêμ(z)Ωμ(y) & (Aw')(w'êμ(z)Ωμ(y) → wRw')

Fra dette følger wêMax(R,μ(z)Ωμ(y)). Men w var en vilkårlig verden som oppfylte (5). Vi har derfor Max(R,μ(z)) Inkl Max(R,μ(z)Ωμ(y)). Ved hjelp av (4.2) og (4.1) impliserer dette:

(9) Max(R,μ(z)) Inkl μ(x)Ωμ(y). Siden Max(r,μ(z))≠ø og K(x,y),zêU følger det vi ønsker, nemlig Ba(K(x,y),z), ved hjelp av (3). Dette viser at B7 lar seg utlede i B;1*.

Ad B8: Anta (1) x,yêU & μ(x) Inkl μ(y). Anta videre (2) (Er)Ba(r,x)) & (Ep)Ba(p,y).

© Morten Harboe Rognes 2013

Anta dessuten at (3) (Ew)(wêI & w ⊨ SNu(Mg(r: Ba(r,y))) & w ⊨x).

Som nevnt tidligere følger fra B14 eksistensen av en preferanserelasjon R over I der

(4) (Az)(Aw)(Ba(z,w) ↔ z,wêU & ø≠ Max(R,μ(w)) Inkl μ(z))

Vi ønsker å vise at (+) K(SNu(Mg(r: Ba(r,y))),x) = SNu(Mg(r: Ba(r,x))).

La oss først vise at (5) μ(SNu(Mg(r: Ba(r,y)))) = Max(R,μ(y))

La w være en vilkårlig mulig verden der wêμ(SNu(Mg(r: Ba(r,y)))). Det følger fra dette at (Ar)(Ba(r,y) → wêμ(r)). Anta for reduktio at ¬(wêMax(R,μ(y)). Sett per definisjon u0= μ;-1(Max(R,μ(y))). Fra (2) og (4) følger at ø≠Max(R,μ(y)) og fra dette, definisjonen av u0 og (4) har vi Ba(u0,y). Men da følger siden (Ar)(Ba(r,y) → wêμ(r)), at wêMax(R,μ(y)). Dette gir en umiddelbart en motsigelse. Vi har dermed vist inklusjonen mot høyre i (5). Anta på den annen side at wêMax(R,μ(y)) for vilkårlig w og at Ba(r,y) for vilkårlig r. Da følger ved hjelp av (4) at Max(R,μ(y)) Inkl μ(r). Men wêMax(R,μ(y)). Det følger da at wêμ(r). Siden r var vilkårlig har vi vist (Ar)(Ba(r,y) → rêμ(r)). Men da har vi wê μ(SNu(Mg(r: Ba(r,y)))). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (5).

På akkurat samme måte som vi nå har gitt bevis for (5) kan man vise:

(6) μ(SNu(Mg(r: Ba(r,x)))) = Max(R,μ(x))

Fra (3) og (5) følger: (7) Max(R,μ(y)) Ω x≠ø. For å vise at (+) holder vil det være tilstrekkelig i lys av (5) og (6) å vise:

(++) Max(R,μ(y))Ωμ(x) = Max(R,μ(x))

Vi viser først inklusjonen mot høyre: Anta wêMax(R,μ(y))Ω μ(x). Da følger (Az)(zêμ(y) → wRz) & wêμ(y) & wêμ(x). Fra dette og (1) følger da wêμ(x) & (Az)(zêμ(x) →wRz). Men herav wêMax(R,μ(x)). Dette viser inklusjonen mot høyre. La oss så ta for oss inklusjonen mot venstre: Anta (8) wêMax(R,μ(x)). Da følger umiddelbart at wêμ(x) og derfor i lys av (1) at wêμ(y). Fra (7) følger eksistensen av w0 der vi har w0êμ(x) & w0êMax(R,μ(y)). Fra dette følger (9) (Az)(zêμ(y) → w0Rz) & w0êμ(y). Siden wêMax(R,μ(x)) & w0êμ(x) følger (Az)(zêμ(x) →wRz) og derfor wRw0. Da har vi ved hjelp av (9) at (Az)(zêμ(y) → wRz) siden R er transitiv. Men wêμ(y) siden wêμ(x) og μ(x) Inkl μ(y). Det følger at wêμ(x)Ω Max(R,μ(y)). Dermed har vi vist at (++) holder.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for at B8 lar seg utlede i B;1*.

Ad B9: Anta (1) Ba(x,y). Som nevnt tidligere følger fra B14 eksistensen av en preferanserelasjon R over I der

(2) (Az)(Aw)(Ba(z,w) ↔ z,wêU & ø≠ Max(R,μ(w)) Inkl μ(z))

Fra dette og (1) kan man slutte: (3) x,yêU & ø≠Max(R,μ(y)) Inkl μ(x). Men fra dette og definisjonen av operasjonen Max følger umiddelbart x,yêU & ø≠Max(R,μ(y)) Inkl μ(y) som sammen med (2) gir en Ba(y,y). Dette viser at B9 kan utledes i B;1*.

Ad B10: Vi må bevise (+): (Aw)(wêI → (Ey)(yêU & Card(μ(y)) >=2 & Ba(μ;-1({w}), y)))

Fra B14 følger at det finnes en preferanserelasjon R over I slik at:

(1) (Ay)(Ax)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y)))

(2) (Aw)(wêI → (Ew')(w'êI & wR*w'))

Vi skal vise at (+) holder. Anta derfor w er et vilkårlig element der (3) wêI. Fra dette og (2) følger eksistensen av w' der (4) w'êI & wR*w'. Definer α ved (5) α= {w,w'}. Da har man åpenbart (6) μ;-1(α=êU & Card(μ(μ;-1(α))) >=2. Det vil da i lys av (1) være tilstrekkelig å vise at (++) ø ≠ Max(R, {w',w}) Inkl {w}. Nå har man (7) wêα. Anta for vilkårlig zêα. Da er det to muligheter: Tilfelle (i): z=w. I så fall har vi zRz og derfor wRz. Tilfelle (ii): z=w'.

© Morten Harboe Rognes 2013

Da følger fra (4) at wR*w' og derfor wRw'. I begge tilfelle har man wRz. Siden z var vilkårlig har vi (Az)(zêα → wRz). Sammen med (7) impliserer dette og definisjonen av Max at (8) wêMax(R,α). Anta nå for vilkårlig p at pêMax(R,α). Da har vi
(9) pêα &(Az)(zêα → pRz).Siden pêMax(R,α) har pêα og derfor p=w v p=w'. Anta for reduktio p=w'. Da har vi ved hjelp av (9) at (Az)(zêα → w'Rw). Da følger w'Rw siden wêα. Men dette strider mot wR*w', Det følger at p≠w' og derfor at p=w. Vi har nå vist Max(R,α)={w}. Det følger at (++) holder, og derfor at B10 kan utledes i B;1*.

Ad B11: Vi må vise (+) (Ay)(yêU & 0 ≠ Card(μ(y)) < Aleph;0. → (Ez)(Ba(z,y)))
Fra B14 følger at det finnes en preferanserelasjon R over I slik at:

(1) (Ay)(Ax)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y)))

Anta for vilkårlig y at (2) yêU & 0 ≠ Card(μ(y)) < Aleph;0. Det vil da være tilstrekkelig å vise at (++) Max(R,μ(y)) ≠ ø. Anta nå for reduktio ad absurdum at (3) Max(R,μ(y))=ø. Det følger da ved hjelp av definisjonen av Max at (4) (Ar)(rêμ(y) → (Ez)(zêμ(y) & ¬(rRz)))
Definerer vi L* = Mg(<w,w'>: wRw'& w'Rw)). Gitt denne definisjonen er det lett å vise at (5) (Aw)(Aw')(¬(w'Rw) ↔. wR*w') når R er en preferanserelasjon over I. Dette og (4) impliserer (6) (Ar)(rêμ(y) → (Ez)(zêμ(y) & zR*r)). Fra dette følger i sin tur at
(7) (Ar)(rêμ(y) → (Ez)(zêμ(y) & z≠r & zR*r)). Fra (2) følger det at det må finnes et naturlig tall n>=1 slik at μ(y) = {x;1, ... ,x;n} for visse x;1, ...,x;n. Anta nå at a;1 er et element i μ(y). Ved hjelp av (6) kan man da slutte at det må finnes et element a;2êμ(y) som er forskjellig fra a;1 og der a;2R*a;1. Siden a;2êμ(y) må det finne a;3êμ(y) der a;3 R*a;2. Det følger da at a;3 R*a;i for i=1,2 siden R er en preferanserelasjon. Vi har derfor a;3ê μ(y)-{a;1,a;2}. På denne måten kan vi forsette oppover slik at vi finner a;nêμ(y) der a;nR*a;i for i=1, ...,n-1 & a;nêμ(y) -{a;1,...,a;(n-1)}. Nå har vi at de diverse a;1 ... a;n alle er forskjellige fra hverandre og med i μ(y). Vi har derfor at {a;1....a;n}={x;1, ... ,x;n}=μ(y). Men a;nêμ(y). Ifølge (6) må det da finnes zêμ(y) slik at zR*a;n. Da kan ikke z=a;n for det er umulig at a;nR*a;n. Derfor må z= a;j for noe j<n. Men da a;jR*a;n & a;nR*a;j som også er umulig. Det følger at (3) er usann og derfor at (++) holder. Fra (++) og (1) følger Ba(y,y) og derfor (Ez)Ba(z,y). Dette viser at B11 kan utledes i B;1*

Ad B12: Fra B14 følger at det finnes en preferanserelasjon R over I slik at:

(1) (Ay)(Ax)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R,μ(x)) Inkl μ(y)))

La oss først vise at om w,w'êI & w'≠w har man:

(2) wR*w' ↔ Ba(μ;-1({w},μ;-1({w,w'})).

Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre: Anta wR*w'. Da kan vi som i beviset for at B10 er et teorem i B;1* vise at Max(R, {w,w'}= {w}. Fra dette og (1) følger ganske umiddelbart at Ba(μ;-1({w},μ;-1({w,w'})).

Vi tar så for oss kondisjonalen mot høyre i (2): Anta Ba(μ;-1({w},μ;-1({w,w'})). Ved hjelp av (1) følger da ø≠ Max(R,{w,w'}) Inkl {w}. Dette impliserer ved hjelp av definisjonen av Max, siden w'ê{w,w'} at wRw'. Siden wêMax(R,{w,w'}) følger:
(3) (Az)(zê {w,w'} → wRz). Anta nå at w'Rw. Da følger (Az)(zê {w,w'} → w'Rz). Da har vi siden w'ê{w,w'} at w'êMax(R,{w,w'}). Men da har vi w=w'. Dette strider mot forutsetningen om at w≠w'. Vi har dermed vist at (2) holder om w≠w' & w,w'êI.

Anta nå (4) ¬(Ez)Ba(z,y). Da følger ved hjelp av (1) at Max(R,μ(y))=ø
Fra dette kan man i sin tur slutte at

¬(Ep)(pêμ(y) & (Az)(zêμ(y) → pRz)). Med andre ord har vi da:

© Morten Harboe Rognes 2013

(5) $(Ap)(p\hat{e}\mu(y) \rightarrow (Ez)(z\hat{e}\mu(y) \,\&\neg(pRz)))$. Dette impliserer videre:

(6) $(Ap)(p\hat{e}\mu(y) \rightarrow (Ez)(z\hat{e}\mu(y) \,\&p\neq z \,\&\, zR^*p))$. Ved hjelp av (2) har vi da

(7) $(Ap)(p\hat{e}\mu(y) \rightarrow (Ez)(z\hat{e}\mu(y) \,\&\, z\neq p \,\&\, Ba(\mu;\text{-}1(\{z\}),\mu;\text{-}1(\{z,p\}))))$

Men dette er en alfabetisk variant av konsekventen i B12. Det følger at B12 lar seg utlede i B;1*.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 6.14. **QED**.

Ovenfor har vi vist at B14 lar seg utlede i B;1. Det kan derfor være av interesse å se hvilke av aksiomene i B;1 vi har brukt for å utlede B14. Ser man på hvilke aksiomer vi har brukt i beviset for Teorem 6.2 ser man lett at det dreier seg om B2, B5, B6, B8 og B9. Når det gjelder beviset for Teorem 6.3 som sier at Q inneholder alle endelige ikke-tomme delmengder av I ser man at vi har brukt aksiomet B11. For derfor å vise at <I,Q,f0> er en utvalgsstruktur som inneholder enhver ikke-tom delmengde av I har vi altså brukt B2, B5, B6, B8, B9 og B11. I Teorem 6.4 bruker vi Hanssons teorem og siden dette er en ren mengdeteoretisk sats er ikke noen av aksiomene i B;1 involvert. Ser man nå på Teorem 6.5 benytter vi i dette beviset aksiomene B3 og B5. B3 må derfor tas med på listen siden det ikke har blitt brukt tidligere. Teorem 6.6 - 6.8 bygger på Teorem 6.2 - 6.5 og derfor på de aksiomene vi har nevnt. Ingen aksiomer i B;1, utover dem vi har nevnt så langt, blir benyttet i bevisene for disse teoremene. I Teorem 6.9 benytter vi i tillegg til B6 også aksiomet B10. Dette har ikke brukt i bevisene for tidligere teoremer. Endelig benytter vi i beviset for Teorem 6.10 for første gang akiomet B12. Ved hjelp av 6.10 og de øvrige satser som vi så langt har vist kan man så direkte utlede B14 og B13. Det bør forøvrig bemerkes, noe man innser ved en nærmere inspeksjon av de bevis vi har gitt, at B13 kan utledes uten at vi benytter B10.

For å bevise B14 i teorien B;1 har vi altså brukt B2, B3, B5, B6, B8, B9 samt B10 - B12. Hva da med aksiomene B1, B4 og B7? Vel, som vi nevnte ved redegjørelsen for aksiomene i B;1 kan disse utledes fra de øvrige vi har nevnt. Strengt tatt er de derfor overflødige i teorien B;1.

Vi nevnte at aksiomene i forrige paragraf at aksiomene B1 - B6 og B9 nærmest var selvinnlysende gitt at man aksepterer at Ba er et meningsfullt predikat. I forbindelse med B7 og B8 nevnte vi at også disse kan fremstå som svært plausible når man tenker nøyere igjennom hva de uttrykker. Derimot konkluderte vi med at B10 - B12 var alt annet enn direkte innlysende og at bare overveielser av mer indirekte natur eventuelt kunne overbevise en om fornuftigheten av disse påstandene.[7] Vi har nå gjennomført slike overveielser av indirekte natur i og med at vi møysommelig har vist at B10 - B12 sammen med kjerneteorien B1 - B6 og B9, utvidet med de "halvinnlysende" prinsippene B7 og B8, impliserer B14. Dessuten har vi vist at B14 sammen med det trivielle aksiomet B2 impliserer B10 - B12. I lys av dette kan man konkludere med at gitt kjerneteorien B1- B6 og B9 utvidet med B7 og B8 er B14 ekvivalent med B10 - B12. Hvis man derfor kunne akseptere B14 som et selvinnlysende, apodiktisk, prinsipp har man selvfølgelig gode grunner til å akseptere B10 - B12.[8] Kan man så akseptere at B14 er et selvinnlysende prinsipp? Det er intet i det vi har nevnt som direkte utlukker at det er nødvendig sant, men uansett hvordan man vrir og vender på det synes det merkelig å si at det er selvinnlysende. Man kunne kanskje si at teorien B;1* med sine to

7 Det er viktig å understreke ordet "eventuelt" i denne forbindelse.

8 Fjerner man aksiomet B10 fra B;1 kaller vi den resulterende teori for B;1-. Teorien B;1* med B14 erstattet med B13 kaller vi B;1*-. Studerer man bevisene for de satser vi så langt har nevnt skulle det ikke være vanskelig å innse at disse to teoriene B;1- og B;1*- er ekvivalente, ie at Th(B;1-) = Th(B;1*-).

© Morten Harboe Rognes 2013

aksiomer B2 og B14 er en "deduktivt sterk", konsistent, elegant og relativt enkel teori. Til det kan man si at man fra deduktiv styrke og konsistens kombinert med enkelhet og eleganse ikke i seg selv kan slutte noe om sannhet hvis man da ikke tar det for gitt at enkelhet er sannhetens kjennemerke.

Uansett er teorien B;1, og den ekvivalente teorien B;1*, vel verdt omhyggelige undersøkelser. I den neste paragrafen skal vi undersøke nærmere den entydig bestemte preferanserelasjonen over I som påstås å eksistere i B14 og B13.

§7 Alternative karakteristikker av den underliggende preferanserelasjon

I denne paragrafen skal vi arbeide innenfor teorien B;1. Dette innebærer at alle satser vi nevner kan utledes på basis av aksiomene i B;1.

Fra Teorem 6.11 fremgår det at man i teorien B;1 kan vise at det finnes en entydig bestemt preferanserelasjon R over I som oppfyller kravet

$(Ay)(Ax)(Ba(y,x) \leftrightarrow (x,y\hat{e}U \;\&\; \emptyset \neq Max(R,\mu(x))\ Inkl\ \mu(y)))$.

Det følger fra dette at B13 kan utledes i B;1.

La oss definere relasjonen R;0 ved:

Definisjon 7.1: $R;0 = (iR)(Pref(R,I) \;\&\; (Ay)(Ax)(Ba(y,x) \leftrightarrow (x,y\hat{e}U \;\&\; \emptyset \neq Max(R,\mu(x))\ Inkl\ \mu(y))))$

Det følger fra denne definisjonen, og det at vi kan utlede B13 i B;1, at følgende sats holder:

Teorem 7.1: (i) $Pref(R;0,I)$

(ii) $(Ay)(Ax)(Ba(y,x) \leftrightarrow (x,y\hat{e}U \;\&\; \emptyset \neq Max(R;0,\mu(x))\ Inkl\ \mu(y)))$

Det vi skal gjøre i denne paragrafen er for det første å definere to andre relasjoner R;1 og R;2. For det andre vil vi vise at man i B;1 kan utlede at disse to relasjonene er identiske med R;0. Dette er i og for seg ikke så meget, men de alternative definisjonene kaster tross alt noe lys over R;0.

La oss nå presentere definisjonene av R;1 og R;2. Vi starter med R;1. Denne relasjonen er definert slik:

Definisjon 7.2: $x\ R;1\ y \leftrightarrow .\ x,y\hat{e}I \;\&\; [Ba(\mu;\text{-}1(\{x\}), \mu;\text{-}1(\{x,y\}))\ \vee\ x=y\ \vee\ (Ba(\mu;\text{-}1(\{x,y\}), \mu;\text{-}1(\{x,y\})) \;\&\; \neg\, Ba(\mu;\text{-}1(\{x\}), \mu;\text{-}1(\{x,y\})) \;\&\; \neg Ba(\mu;\text{-}1(\{y\}), \mu;\text{-}1(\{x,y\})))\ ]$

Siden denne definisjonen er ganske "tungt" formalisert kan det være nyttig å få frem litt tydeligere hva den sier. Det den uttrykker er at x bærer relasjonen R;1 til y hvis og bare hvis de følgende to krav er oppfylt:

(i) x,y er mulige verdener

(ii) De mulige verdenene x og y oppfyller et eller annet av de følgende tre krav:

(a) $Ba(\mu;\text{-}1(\{x\}), \mu;\text{-}1(\{x,y\}))$

© Morten Harboe Rognes 2013

(b) x=y
(c) Ba(μ;-1({x,y}), μ;-1({x,y})) & ¬ Ba(μ;-1({x}), μ;-1({x,y})) &
¬Ba(μ;-1({y}), μ;-1({x,y}))

Noen kommentarer kan være hensiktsmessige i forbindelse med (a) - (c). Først kan det være verdt å merke seg at μ;-1({x,y}) er utsagnet hvis sannhetsmengde er mengden som kun inneholder verdenene x,y. Videre er μ;-1({x}) det utsagnet som har {x} som sin sannhetsmengde. At Ba(μ;-1({x}), μ;-1({x,y})) innebærer da at det siste utsagnet bør aksepteres relativt til det andre. Nå er det bare to utsagn bortsett fra μ;-1({x,y}) selv som er kompatible med μ;-1({x,y}), nemlig μ;-1({x}) og μ;-1({y}). At det μ;-1({x}) bør aksepteres relativt til μ;-1({x,y}) innebærer derfor at x bør foretrekkes fremfor y, at denne verdenen i en viss forstand epistemologisk sett er å foretrekke av de to verdenene x og y.

La oss så kommentere kravet (c). Dette sier for det første at utsagnet μ;-1({x,y}) bør aksepteres relativt til seg selv, med andre ord i lys av B9 at et eller annet utsagn bør aksepteres relativt til μ;-1({x,y}). I tillegg uttrykker dette kravet at Man hverken bør akseptere μ;-1({x}) eller μ;-1({y}) relativt til utsagnet hvis sannhetsmengde er {x,y}. Det er vanskelig å tolke dette på noen annen måte enn at kravet uttrykker at de to verdenene x og y epistemisk sett er like plausible. Man kan derfor si i lys av definisjonen vi har gitt at xR;1y intuitivt uttrykker at verdenen x enten er epistemisk sett å foretrekke fremfor verdenen y, eller at x er identisk med y, eller at x og y er epistemisk sett like plausible. Dette er hva det er nærliggende å konkludere med utfra en rimelig fortåelse av predikatet "utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y". Hvis man nå kan vise at R;1 og R;0 er den samme relasjonen synes definisjonen av R;1 å kaste adskillig lys over hva slags relasjon det er man har å gjøre med i aksiom B13 og aksiom B14.

La oss nå definere den andre relasjonen vi skal undersøke. Definisjonen er denne:

Definisjon 7.3: xR;2y ↔ x,yêI & (Ez)[zêU & (Er)(Ba(r,z)) &
[xêμ(SNu(Mg(q: Ba(q,z)))) & ¬(yê(μ(z)- μ(SNu(Mg(q: Ba(q,z)))))).
v. x,yêμ(SNu(Mg(q: Ba(q,z))))]]

Også denne definisjonen er mildt sagt uigjennomsiktig. Kommentarer er derfor på sin plass. Det definisjonen sier er at xR;2y holder hvis og bare hvis x og y er mulige verdener og det finnes et utsagn z som noe bør aksepteres relativt til og vi dessuten har at en av de følgende betingelser holder:

(a) xêμ(SNu(Mg(q: Ba(q,z)))) & ¬(yê(μ(z)-μ(SNu(Mg(q: Ba(q,z)))))
(b) x,yêμ(SNu(Mg(q: Ba(q,z))))

Det i forbindelse med (a) og (b) at man kan snakke om uigjennomtrengelighet.

La oss derfor bemerke at Mg(q:Ba(q,z)) er mengden av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til utsagnet z. Videre er SNu(Mg(q: Ba(q,z))) konjunksjonen av alle disse utsagn. Endelig er μ(SNu(Mg(q: Ba(q,z)))) sannhetsmengden til konjunksjonen av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til z. Denne mengden er den som vi tidligere har omtalt som mengden av de epistemisk sett ideelle verdenene i utsagnet z. Det (a) sier er derfor at verdenen x er med blandt de epistemisk sett ideelle verdenen i utsagnet z og at y er med i

© Morten Harboe Rognes 2013

sannhetsmengden til z, men ikke med blandt de epistemisk sett ideelle verdenene i z. Under disse omstendigheter virker det rimelig å si at x er epistemisk sett mer ideell enn verdenen y.

Når det gjelder (b) uttrykker denne formelen, i lys av de forklaringene vi nå har gitt, at såvel verdenen x som verdenen y er med blandt de epistemisk sett ideelle verdenene i z. I såfall virker det rimelig å anta at x er like epistemisk ideel som y.

Man kan altså si at definiens i Definisjon 7.3 uttrykker at verdenen x er minst like så epistemisk ideell som verdenen y. Hvis man nå kan vise at R;0=R;2 virker det igjen rimelig å si at dette resultat kaster adskillig lys over naturen til den entydig bestemte preferanserelasjon hvis eksistens påstås i grunnsetningene B13 og B14.

Vi skal nå gi bevis for den følgende sats:

Teorem 7.2: (i) R;0 = R;1 = R;2
(ii) Det følgende holder for i=0,1,2:
(Ay)(Ax)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R;i,μ(x)) Inkl μ(y)))

Bevis: Man ser umiddelbart at punkt (ii) i denne satsen følger ved hjelp av Teorem 7.1 og det første punktet i satsen. Vi skal derfor bare gi bevis for punkt (i).

Ved hjelp av Teorem 7.1 har vi:

(1) Pref(R;0,I)

(2) (Ay)(Ax)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R;0,μ(x)) Inkl μ(y)))

(I) Vi skal først vise (3) R;0 = R;1

(a) Først bevises inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlige w;1,w;2 at (3.1) w;1,w;2êI & w;1R;0w;2. Det er da to muligheter, enten ¬(w;2R;0 w;1) eller w;2 R;0 w;1.

Tilfelle (i): ¬(w;2 R;0 w;1). Siden R;0 er en preferanserelasjon har vi da ved hjelp av (3.1) at (4) Max(R;0, {w;1,w;2}) = {w;1}. Siden vi har μ;-1({w;1,w;2}) og μ;-1({w;1}) er utsagn har vi derfor fra (4) at

(5) ø≠ Max(R,μ(μ;-1({w;1,w;2})) Inkl μ(μ;-1({w;1,w;2}))

Fra dette følger ved hjelp av (2) at Ba(μ;-1({w;1}), μ;-1({w;1,w;2})). Herav har man så ved hjelp av definisjonen av R;1 at w;1R;1 w;2.

Tilfelle (ii): w;2 R;0 w;1. Da har vi i lys av (3.1) at

(6) Max(R;0, {w;1,w;2}) = {w;1,w;2}. Er w;1=w;2 har vi umiddelbart i kraft av definisjonen av R;1 at w;1R;1w;2. Anta derfor (7) w;1≠w;2. Da har vi i lys av (6) og (1) at

(8.1) ¬(Max(R;0, {w;1,w;2}) = {w;1})

(8.2) ¬(Max(R;0, {w;1,w;2}) = {w;2})

Setter vi nå per definisjon u1=μ;-1({w;1,w;2}), u2=μ;-1({w;1}) og u3= μ;-1({w;2}) følger ved hjelp av (2), (6), (8.1) og (8.2) at Ba(u1,u1) & ¬Ba(u2,u1) & ¬Ba(u3,u1). Ved hjelp av definisjonen av R;1 kan man da slutte w;1 R;1 w;2.

(b) La oss så ta for oss inklusjonen mot venstre. Anta (9) w;1R;1w;2. I lys av definisjonen av R;1 er det nærliggende å skille mellom tre tilfeller.

Tilfelle (i): w;1=w;2. I dette tilfelle er det trivielt at w;1R;0w;2 siden det forutsettes at R;0 er en preferanserelasjon.

Tilfelle (ii): Ba(μ;-1({w;1}),μ;-1({w;1,w;2})). Fra dette og (2) følger:

© Morten Harboe Rognes 2013

(10) ø≠ Max(R;0, {w;1,w;2}) Inkl {w;1}. Er her w;1=w;2 har vi trivielt w;1R;0w;2. Anta derfor w;1≠w;2. Det følger at det er to muligheter, siden R;0 er total:

Tilfelle (ii.1): w;1R;0 w;2. Da holder påstanden trivielt.

Tilfelle (ii.2): w;2R;0w;1. Har man da w;1R;0w2 følger ø≠ Max(R;0, {w;1,w;2}) = {w;1,w;2} som strider mot (10) siden w;1≠w;2. Dette tilfelle er derfor utelukket. Har man på den annen side ¬(w;1R;0w;2) må man ha

Max(R;0,{w;1,w,2}) = {w;2} som igjen strider mot (10) siden w;1≠w;2

Man ser at man i begge tilfellene kan utlede en motsigelse. Dette innebærer at dette tilfellet er utelukket.

Tilfelle (iii): Ba(μ;-1({w;1,w;2}), μ;-1({w;1,w;2})) &

¬ Ba(μ;-1({w;1}), μ;-1({w;1,w;2})) & ¬Ba(μ;-1({w;2}), μ;-1({w;1,w;2}))

Fra dette og (2) følger:

ø≠ Max(R;0,{w;1,w;2}) Inkl {w;1,w;2} &

¬(Max(R;0,{w;1,w;2}) Inkl {w;i}) for i=1,2

Det følger fra dette at Max(R;0,{w;1,w;2}) = {w;1,w;2} og dette må i sin tur implisere, siden R;0 er en preferanserelasjon at w;1R0 w;2 & w;2R;0w;1. Da har man selvfølgelig at w;1R;0 w;2.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at R;1 = R;0.

(II) Vi skal nå bevise at man har (11) R;0 = R;2.

Før vi går videre skal vi imidlertid vise følgende:

(12) (Ay)((Ez)Ba(z,y) → μ(SNu(Mg(r:Ba(r,y)))) = Max(R;0,y))

Anta for vilkårlig y at (13) (Ez)Ba(z,y). Vi ønsker å vise:

(+) μ(SNu(Mg(r:Ba(r,y)))) = Max(R;0,y))

La w være en vilkårlig mulig verden der wêμ(SNu(Mg(r: Ba(r,y)))). Det følger fra dette at (Ar)(Ba(r,y) → wêμ(r)). Anta for reduktio at ¬(wêMax(R,μ(y)). Sett per definisjon u0= μ;-1(Max(R,μ(y))). Fra (2) og (13) følger at ø≠Max(R,μ(y)) og fra dette, definisjonen av u0 og (2) har vi Ba(u0,y). Men da følger siden (Ar)(Ba(r,y) → wêμ(r)), at wêMax(R,μ(y)). Dette gir en umiddelbart en motsigelse. Vi har dermed vist inklusjonen mot høyre i (5). Anta på den annen side at wêMax(R,μ(y)) for vilkårlig w og at Ba(r,y) for vilkårlig r. Da følger ved hjelp av (2) at Max(R,μ(y)) Inkl μ(r). Men wêMax(R,μ(y)). Det følger da at wêμ(r). Siden r var vilkårlig har vi vist (Ar)(Ba(r,y) → rêμ(r)). Men da har vi wê μ(SNu(Mg(r: Ba(r,y)))). Dermed har vi vist at (+) holder. Siden y var vilkårlig entitet slik at (13) holdt følger det at (12) holder.

La oss nå gå over til beviset for R;0=R;2:

(a) Vi beviser først inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlige w;1,w;2êI at (13) w;1R;0w;2. Definer α ved (14) α= μ;-1({w;1,w;2}). Da har vi naturligvis, siden α er det utsagnet som har {w;1,w;2} som sin sannhetsmengde, at (15) αêU. Siden {w;1,w;2} er en endelig delmengde av I følger ved hjelp av B11 at (16) (Ey)Ba(y,α). Vi skiller nå mellom tre tilfelle:

Tilfelle (i): w;1R;0w;2 & w;2R;0w;1. Da har man

(17) ø≠Max(R;0,{w;1,w;2})={w;1,w;2}

Men fra dette, (12) og (16) følger: w;1,w;2ê μ(SNu(Mg(r:Ba(r,α)))). Ved hjelp av definisjonen av R;2 følger så w;1R;2w;2 i lys av (15) og (16).

Tilfelle (ii): w;1R;0w;2 & ¬(w2 R;0w;1). Da følger w;1≠w;2 og derfor selvfølgelig at

© Morten Harboe Rognes 2013

{w;1,w;2} ≠ {w;1}. & Max(R;0,{w;1,w;2}) = {w;1}. Siden (Ey)Ba(y,α) har vi i lys av (12):

μ(SNu(Mg(r:Ba(r,α)))) = Max(R;0,{w;1,w;2}) = {w;1}

Det følger w;1ê μ(SNu(Mg(r:Ba(r,α)))) & w;2êμ(α)-μ(SNu(Mg(r:Ba(r,α))))

Fra dette, (15), (16) samt definisjonen av R;2 følger følger w;1R;2w;2.

Dette viser at R;0 Inkl R;2.

(b) La oss nå vise at R;2 Inkl R;0. Anta derfor for vilkårlige w;1,w;2 at w;1R;2w;2. Da følger ved hjelp av definisjonen av R;2 at

(18) w;1,w;2êI og dessuten at det finnes α der

(19.1) αêU

(19.2) (Ez)Ba(z,α)

(19.3) w;1ê μ(SNu(Mg(r:Ba(r,α)))) & w;2êμ(α)-μ(SNu(Mg(r:Ba(r,α)))) v
w;1,w;2êμ(SNu(Mg(r:Ba(r,α))))

I lys av (19.3) skiller vi mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): w;1ê μ(SNu(Mg(r:Ba(r,α)))) & w;2êμ(α)-μ(SNu(Mg(r:Ba(r,α))))

Det er i dette tilfelle klart at w;1≠w;2. Fra (12) og (19.2) følger videre:

(20.1) w;1êMax(R;0,μ(α))

(20.2) w;2êμ(α)- Max(R;0,μ(α))

Anta for reduktio at (21) ¬(w;1R;0w;2). Siden R;0 er en preferanserelasjon over I følger det at R;0 er total. Dette faktum og (21) impliserer at w;2R;0w;1. Siden α={w,1,w;2} følger det enn mer Max(R;0,α) = {w;2}. Dette strider åpenbart mot (20.2) det følger at w;1R;0w;2.

Tilfelle (ii): w;1,w;2êμ(SNu(Mg(r:Ba(r,α)))). Fra (12) og (19.2) følger, som i det forrige tilfellet, at w;1,w;2ê Max(R;0,μ(α)) = Max(R;0,{w;1,w;2}). Men fra dette må vi åpenbart ha w;1R;0w;2 & w;2R;0w;1. Følgelig w;1R;0 w;2.

Vi har nå vist at R;2 Inkl R;0

Dermed har vi levert et fullstendig bevis for Teorem 7.2 **QED**.

Det følgende er et enkelt korollar til Teorem 7.1 og Teorem 7.2.

Teorem 7.3: Anta R er en preferanserelasjon over I der vi har:

(Ay)(Ax)(Ba(y,x) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R;i,μ(x)) Inkl μ(y)))

Da har man for alle x,yêI at følgende betingelser er ekvivalente:

(i) xRy

(ii) x,yêI & (Ez)[zêU & (Er)(Ba(r,z)) &
[xêμ(SNu(Mg(q: Ba(q,z)))) & ¬(yê(μ(z)- μ(SNu(Mg(q: Ba(q,z)))))).
v. x,yêμ(SNu(Mg(q: Ba(q,z))))]]

(iii) x,yêI & [Ba(μ;-1({x}), μ;-1({x,y})) v x=y v
(Ba(μ;-1({x,y}), μ;-1({x,y})) & ¬ Ba(μ;-1({x}), μ;-1({x,y})) &
¬Ba(μ;-1({y}), μ;-1({x,y})))]

Vi nevner denne satsen fordi den gir en et klart bilde av hvordan den entydig bestemte preferanserelasjonen R over I som oppfyller kravet (+) i dette teoremet kan defineres ved hjelp av predikatet "Ba(x,y)". Det burde være åpenbart at denne innsikt ikke bør gjemmes bort.

© Morten Harboe Rognes 2013

§8 Enkelhetsrelasjonen og dens egenskaper. En teori som er ekvivalent med B;1

I denne paragrafen skal vi studere en teori som er svært nært relatert til B;1, men som ikke desto mindre er formalt sett forskjellig fra denne teori. Som man husker fra §2 er Δ;5 den predikatmengden man får når man utvider predikatmengden Δ, som er mengden av alle de ikke-logiske predikatene i teorien E;3, med de følgende to predikater, nemlig:

(i) "x er et utsagn som bør aksepteres relativt til utsagnet y"
(ii) "x er en mulig verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som y".

Når det gjelder den siste av disse to predikatene skal vi forkorte dette med utrykket "En(x,y)". Vi tar altså vårt utgangspunkt i språket L;e(Δ;5)

Når det gjelder predikatet "En(x,y)" skal vi for korthetens skyld kalle dette for "enkelhetspredikatet". Mengden av alle de par av mulige verdener som oppfyller dette binære predikatet skal vi kalle for "enkelhetsrelasjonen". Vi betegner denne relasjonen med "R;e". Den formelle definisjonen av dette uttrykket kan formuleres slik:

Definisjon 8.1: R;e = Mg(<x,y>: En(x,y))

Det følger fra dette at "R;e" betegner relasjonen som består mellom to mulige verdener w;1 og w;2 hvis og bare hvis w;1 er en mulig verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w;2. Når det gjelder R;e vil vi også omtale denne relasjonen som "den metodologiske enkelhetsrelasjonen". Relasjonen Mg(<x,y>: Ba(x,y)) kaller vi for akseptanserelasjonen.

Teorien som vi i første omgang skal studere i denne paragrafen betegner vi med B;2*. Den er en utvidelse av egenskapsteorien E;3. Vi skal også i denne forbindelse betrakte en teori med et litt magrere ikke-logisk vokabular. Denne vil bli betegnet med B;2.

La oss gjøre rede for de ikke-logiske aksiomene i denne teorien.

Det første av disse ikke-logiske aksiomene er:

En0: (Ax)(Ay)(En(x,y) → x,yêI)

Man ser umiddelbart at denne formelen uttrykker at dersom x er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen y er x, såvel som y, mulige verdener. Dette er naturligvis en trivialitet i lys av lesemåten til predikatet "En(x,y)". Man bør imidlertid merke seg at formelen ikke kan utledes i E;3 selvom språket utvides til L;e(Δ;5). I lys av definisjonen av R;e ovenfor er En0 ekvivalent med R;e Inkl IxI. Siden I er en mengde som eksisterer følger det ved hjelp av de mengdeteoretiske aksiomene vi legger til grunn at også IxI eksisterer. Siden R;e Inkl IxI følger det da ved hjelp av utsondringsaksiomet at R;e er en mengde og derfor eksisterer i det kumulative hierarkiet av mengder.

Det å vise den blotte eksistens av relasjonen R;e er imidlertid ikke spesielt interessant siden En0 er helt forenelig med at R;e er den tomme mengden. Ytterligere antagelser om R;e er derfor påkrevd om man ønsker seg en interessant teori.

Konjunksjonen av de følgende to grunnsetninger impliserer imidlertid at R;e er en

© Morten Harboe Rognes 2013

preferanserelasjon:

En1: $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}I \rightarrow En(x,y) \vee En(y,x))$
En2: $(Ax)(Ay)(Az)(En(x,y) \& En(y,z) \rightarrow En(x,z))$

Man ser at En1 uttrykker at enkelhetsrelasjonen er total. Grunnsetningen uttrykker med andre ord at dersom w,w' er mulige verdener har vi enten at w har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w' eller at det omvendte er tilfelle. Dette innebærer at alle mulige verdener er sammenlignbare når det gjelder grad av indre koherens, harmoni og enkelhet. Intuitivt virker dette som en temmelig sterk påstand av metafysisk karakter. Man kan neppe si at den på noen måte er selvinnlysende på samme måte som for eksempel grunnsetningene i læren om de naturlige tall. Det virker imidlertid ikke direkte tåpelig å si at *hvis* setningen er sann så dreier det seg ikke om en tilfeldig, men snarere om enn nødvendig sannhet.

Når det gjelder En2 sier denne setningen intet annet enn at R;e er en transitiv relasjon. Aksepterer man at predikatene i L;e(Δ;5) gir mening, og derfor at predikatet "En(x,y)" også er meningsfullt, virker det merkelig om man benekter at w har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w" og samtidig aksepterer at w har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w' og at w' har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w". Dette vil være direkte selvmotsigende. Det er derfor umulig å benekte En2 som åpenbart er en nødvendig sannhet.

Den neste grunnsetningen har sterke likhetspunkter med aksiomet B14. Det representerer en formalisering av det prinsipp som vi formulerte i §1 og som vi der kalte *enkelhetsprinsippet*. Det dreier seg om den følgende setning:

En3: $(Ax)(Ay)(Ba(x,y) \leftrightarrow .\ x,y\hat{e}U \& \text{ø} \neq Max(R;e,\mu(y))\ Inkl\ \mu(x))$

Er R er en preferanse relasjon, og er α en mengde i domenet til denne relasjonen, er, som man husker fra tidligere, Max(R,α) definert som mengden av de elementer x i α der vi har xRy for alle yêα. Max(R,α) er altså de R-maksimale elementene i α. Det En3 uttrykker er derfor at utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y hvis og bare hvis x og y oppfyller følgende tre krav: (i) x og y er utsagn, (ii) mengden av de R;e-maksimale elementene i sannhetsmengden til utsagnet y er ikke-tom, og (iii) mengden av de R;e-maksimale elementene i sannhetsmengden til utsagnet y er inkludert i sannhetsmengden til utsagnet x. Denne setningen kan oppfattes som temmelig plausibel selvom den ikke er direkte selvinnlysende. Er setningen sann virker det også helt rimelig å slutte at det ikke kan dreie seg om en tilfeldig sannhet, men en nødvendig sannhet.

De R;e-maksimale elementene i sannhetsmengden til et utsagn y er, hvis det finnes slike elementer, de verdenene i sannhetsmengden til y som har maksimal grad av indre koherens, harmoni og enkelhet. Man kunne kalle dette for den epistemiske kjernen til utsagnet y. Gitt denne definisjonen uttrykker En3 at et utsagn x bør aksepteres relativt til utsagnet y hvis og bare hvis utsagnet x er sant i alle de verdenene som inngår i den epistemiske kjernen til utsagnet y.

Grunnsetningen En3 vil bli diskutert utførligere senere.

© Morten Harboe Rognes 2013

Det neste, og siste, aksiomet vi tar med er dette:

En4: $(Ax)(x\hat{e}I \rightarrow (Ey)(y\hat{e}I \,\&\, En(x,y) \,\&\, \neg En(y,x)))$

Denne setningen sier at for enhver verden x finnes det en verden y som her en mindre grad av indre koherens, harmoni og enkelhet enn y. Formulert litt mindre pedantisk sier setningen at hvis x er en eller annen vilkårlig valgt verden kan man alltid finne en annen verden som er mer komplisert. I mengden av mulige verdener kan man altså finne en uendelig sekvens av verdener der verdnene i sekvensen blir stadig mer kompliserte. Man ser at En4 er nært beslektet med aksiomet B10 i teorien B;1.

Vi har laget en liste over de ikke-logiske aksiomene vi vil ta i betraktning. Som man ser er de alle formler i L;e(Δ;5). Videre legger man merke til at bare En3 inneholder akseptansepredikatet "Ba". De resterende aksiomene er derfor ikke bare formler i språket L;e(Δ;5), men også formler i det mer "magre" språket L;e(Δ;3).[9]

Teorien B;2* er den teorien vi får når ZFC;u(L;e(Δ;5))[θ;0] utvides med aksiomene En0 - En4 som nye ikke-logiske aksiomer. Teorien kan presist defineres slik:

Definisjon 8.2: B;2* = ZFC;u(L;e(Δ;5))[θ;0 U {En0, En1, En2,En3,En4}]

Teorien B;2* er altså den første-ordens teorien vi får når språket til egenskapsteoorien E;3 utvides med de to predikatene "utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y" og " x er en mulig verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen y" og man dessuten legger til aksiomene En0 - En4.

Det er naturlig å se på en variant av teorien B;2*. La oss se på teorien definert ved:

Definisjon 8.3: B;2= ZFC;u(L;e(Δ;3))[θ;0 U {En0, En1, En2,En4}]

Språket til denne teorien er som man ser L;e(Δ;3), dvs. språket til egenskapsteorien E;3 utvidet med utelukkende enkelhetspredikatet "En(x,y)". De ikke-logiske aksiomene er så aksiomene i ZFC;u(L;e(Δ;3))[θ;0] utvidet med En0, En1, En2 og En4 som ikke-logiske aksiomer. I denne teorien er selvfølgelig ikke "Ba(x,y)" noe primitivt predikat. Dette innføres i stedet ved den følgende stipulative definisjon hvor uttrykket til venstre for likhetstegnet er en forkortelse for uttrykket til høyre for likhetstegnet.

Definisjon 8.4: $Ba(x,y) = x,y\hat{e}U \,\&\, \text{ø} \neq Max(R;e,\mu(y))\ Inkl\ \mu(x)$

Man ser umiddelbart at B;2* er det som kan kalles for en definisjonell utvidelse av B;2. Vi har derfor at følgende sats holder:

Teorem 8.1: Anta α er en vilkårlig formel i L;e(Δ;5). La α* være resultatet som oppstår når man erstatter alle forekomster av formler av typen "Ba(x,y)" i α med "$x,y\hat{e}U \,\&\, \text{ø} \neq Max(R;e,\mu(y))\ Inkl\ \mu(x)$". Da gjelder:

$B;2^* \vdash \alpha \leftrightarrow B;2 \vdash \alpha^*$

9 Man kan konsultere §2 for definisjonene av predikatmengdene Δ;i for i=1, ...,5 .

© Morten Harboe Rognes 2013

Vi skal ikke gi noen detaljert utledning av dette teoremet her, men bemerker bare at det lett kan bevises ved hjelp av teoremet om definisjonelle utvidelser som er bevist i Shoenfield [1], §4.6
Et tilsvarende teorem kan vises i forbindelse med teorien B;1. Språket til B;1 er som man husker L;e(Δ;1). Siden Δ;1 Inkl Δ;5 følger det at formlene i L;e(Δ;1) er en delmengde av formlene i L;e(Δ;5). Det følger selvfølgelig at alle aksiomer og teoremer i B;1 er formler i L;e(Δ;5). La relasjonen R;1 være definert på samme måte som i §7. Vi betrakter nå den følgende formel i L;e(Δ;5) nemlig:

B15 $\quad En(x,y) \leftrightarrow x\ R;1\ y$

La oss kalle teorien ZFC;u(L;e(Δ;5))[θ;0] utvidet med formlene B1 - B12 samt B15 for B;1**. Formelt sett kan B;1** defineres slik:

$B;1^{**} = ZFC;u(L;e(\Delta;5))[\theta;0 \cup \{B1 - B12, B15\}]$

Vi har da at teorien B;1** er en enkel definisjonell utvidelse av teorien B;1 og at den derfor i det vesentlige er ekvivalent med B;1. Vi oppsummerer dette i følgende teorem:

Teorem 8.2: Anta α er en formel i L;e(Δ;5). La α* være resultatet av å erstatte alle forekomster av "En(x,y)" i α med "xR;1y". Da har man:

$B;1^{**} \vdash \alpha \quad \leftrightarrow B;1 \vdash \alpha^*$

Heller ikke i forbindelse med denne setningen gir vi noe detaljert bevis, men henviser til beviset for teoremet om definisjonelle utvidelser i §4.6 i Shoenfield [1].

Kan man nå vise at teoremene i B;2* er akkurat de samme som i B;1** følger det at alle de teoriene vi har sett på så langt er helt ekvivalente. La oss derfor bevise:

Teorem 8.3: $Th(B;1^{**}) = Th(B;2^*)$

Bevis: (a) La oss først vise hvorfor $Th(B;2^*)$ Inkl i $Th(B;1^{**})$. Fra våre tidligere teoremer, Teorem 7.1 og 7.2 fremgår det at R;0 er en preferanserelasjon over I og at
(1) $(Ax)(Ay)(Ba(x,y) \leftrightarrow . \ø \neq Max(R;0,\mu(y))$ Inkl $\mu(x))$. Det fremgår også at R;1= R;0. Fra dette utleder vi at R;1 selvfølgelig også er en preferanserelasjon over I og derfor at En er det ikraft av aksiom B15 som jo inngår i B;1**. Videre har vi fra aksiom B15 at R;e=R;1. Det følger derfor ved hjelp av (1) at $(Ax)(Ay)(Ba(x,y) \leftrightarrow . \ø \neq Max(R;e,\mu(y))$ Inkl $\mu(x))$. Men da har vi at alle aksiomene i B;2* lar seg utlede i B;1**. Siden slutningsreglene er de samme i de to teoriene følger $Th(B;2^*)$ Inkl $Th(B;1^{**})$.

(b) La oss så vise hvorfor $Th(B;1^{**})$ Inkl $Th(B;2^*)$. Det er da nødvendig å vise at aksiomene B1 - B12 samt B15 kan utledes i B;2*. Siden slutningsreglene og de øvrige aksiomene er de samme er dette også tilstrekkelig.

Fra En3 i B;2* følger umiddelbart B2. Vi skal først vise at B14 lar seg utlede i B;2* For dette formål er det tilstrekkelig å vise følgende i B;2*, nemlig:
(1) $(AR)(Pref(R,I)\ \&\ (Ax)(Ay)(Ba(x,y) \leftrightarrow . \ø \neq Max(R,\mu(y))$ Inkl $\mu(x)) \rightarrow R=R;e)$
Anta derfor at

© Morten Harboe Rognes 2013

(2.1) Pref(R,I) og

(2.2) (Ax)(Ay)(Ba(x,y) ↔ . ø≠Max(R,μ(y)) Inkl μ(x))

Anta dessuten for reduktio ad absurdum at (3) R≠R;e. Fra (3) følger eksistensen av w1,w2êI der vi har (w1Rw2 & ¬(w1R;e w2)) v (¬(w1Rw2) & w1R;e w2). Vi viser at en motsigelse kan utledes i det første tilfelle. Beviset for at en motsigelse også kan utledes i det andre tilfellet overlates til leseren. Anta derfor at (4) w1Rw2 & ¬(w1R;e w2). Sett per definisjon (5) a={w1,w2}. Det følger umidelbart at (6) w1≠w2 siden R;e er en preferanserelasjon.

Fra ¬(w1R;e w2) følger, siden R;e er en preferanserelasjon at w2R;e w1. Vi har derfor (6) w2 R;e* w1. Fra dette følger (7) ø≠Max(R;e,a) = {w2}

Vi skiller nå mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): ¬(w2Rw1). Da følger ved hjelp av (4) at (8) w1R*w2 og derfor at (9) ø≠ Max(R,a)= {w1}. Fra dette og (2.2) følger (10) Ba(μ;-1({w1}), μ;-1(a)). Fra dette og aksiom En3 kan man slutte ø≠ Max(R;e,a) Inkl {w1}. Men dette strider åpenbart mot (7). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (ii) w2Rw1 da har vi at (11) ø≠Max(R, a) = {w1,w2}. Fra (7) og En3 følger Ba(μ;-1{w2}), μ;-1(a)). Fra dette og (2.2) følger Max(r,a) Inkl {w2}. Men dette strider åpenbart mot (11) siden w1≠w2. Det følger at også dette tilfellet er utelukket.

Siden begge tilfellene leder til motsigelser må man konkludere med at R;e=R. Vi har dermed levert et fullstendig bevis for (1).

Fra (1) følger som vi nevnte at B14 lar seg utlede i B;2*. Men siden også B2 er et teorem i B;2* følger fra et tidligere teorem at vi kan utlede alle grunnsetningene B1 - B12. Det eneste vi må vise er at R;1 slik den ble definert i tidligere er identisk med R;e. Men på basis av B1 - B12 kunne vi utlede at R;1 er identisk med den entydige bestemte R som oppfyller kravene (2.1) og (2.2) ovenfor. Men fra det vi viste ovenfor følger det at denne R er identisk med R;e. Fra dette følger R;1=R;e og derfor at aksiom B15 holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at Th(B;1**) Inkl Th(B;2*). Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED**.

Vi kan nå sammenfatte det vi har vist i denne paragrafen slik:

Teorem 8.4: Teoriene B;1, B;1*, B;1**, B;2 og B;2* er alle i det vesentlige ekvivalente.

I den neste paragrafen skal vi se på visse alternativer til den teorien vi i det vesentlige har arbeidet innenfor, nemlig B;1. Fra intet av det vi har bevist i vårt arbeid så langt er det noe som berettiger en til noen uforbeholden konklusjon om at denne teorien er korrekt. Heller ikke har vi gitt noen definitive argumenter for at de forskjellige primitive predikatene vi så langt har nevnt gir noen skikkelig mening og ikke bare står for tåkete abstraksjoner som enhver virkelig stringent tenker bør holde seg for god til å beskjeftige seg med. Det virker derfor naturlig å gi en mer utførlig diskusjon av alternativer til de teoriene vi har nevnt og en grundigere diskusjon av de grunnbegrepene som inngår i dem.

§9 Alternativer til akseptanseteorien vi har undersøkt

At akseptansepredikatet "utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y" gir mening synes å være utvilsom riktig. Relativt til konjunksjonen av alle de utsagn som jeg inntil det nuværende tidspunkt har observert at faktisk beskriver foreliggende forhold bør jeg for eksempel

© Morten Harboe Rognes 2013

akseptere den påstand at planetene fremdeles vil kretse rundt solen om fjorten dager. I tillegg vil det være tusenvis av andre påstander jeg også bør akseptere. Hvis jeg ikke på basis av de observasjoner jeg har gjort så langt burde akseptere at min hånd ville bli alvorlig forbrent dersom jeg om en måned holder den i et halv minutt mot en glødende kokeplate, om jeg ikke burde akseptere at jeg ville bli alvorlig skadet eller omkomme dersom jeg om et år hoppet ut fra taket på en bygning med ti etasjer ville det være vanskelig å se hvordan man meningsfullt kunne planlegge noe, inngå avtaler om noe eller i det hele tatt kunne handle. I lys av disse eksemplene virker det eiendommelig å benekte at predikatet "Ba(x,y)" er meningsfullt. Videre virker det absurd om man benekter at en lang rekke induktive slutninger er akseptable. Man kan gå lenger enn dette. La oss kalle en induktiv slutning for kontingent om konklusjonen, såvel som konjunksjonen av premissene er kontingente utsagn og hverken konklusjonen eller negasjonen av konklusjonen kan utledes fra konjunksjonen av premissene. Man kan da fremheve at det er selvmotsigende å hevde at det ikke eksisterer akseptable kontingente induktive slutninger.

Men uansett om det er logisk nødvendig om det finnes akseptable induktive slutninger eller ei, fritar ikke dette oss for en drøftelse av teorien B;1 og de andre ekvivalente teoriene vi har formulert. De grunnleggende aksiomene i B;1 var B1- B12. men allerede under fremstillingen av disse nevnte vi at B1, B4 og B7 strengt tatt var overflødige og kunne utledes fra de øvrige. Strengt tatt kunne de utledes fra B2, B3, B5, B6, B8 og B9. Videre nevnte vi at de tre siste grunnsetningene B10 - B12 og spesielt B11 og B12 var langt mindre innlysende enn de andre. Vi fant også at setningene B2, B3, B5, B6 og B9 virket mer overbevisende enn B8. Det er derfor to andre teorier som er svakere enn B;1 som man derfor bør betrakte. Den første teorien er ekvivalent med B;1 minus grunnsetningene B8 og B10 - B12. Siden det kan være gunstig å ha et navn på denne teorien kaller vi den for "den minimale akseptanseteorien". Den andre teorien er denne minimale akseptanseteorien utvidet med "Arrow"-aksiomet B8. Denne teorien skal vi omtale som "den reduserte aksptanseteorien".

I §6 definerte vi en viss struktur <I,Q,f0> og vi viste at denne strukturen var en utvalgsstruktur. Studerer man beviset for dette teoremet, Teorem 6.2 i §6 ser man at de aksiomene som benyttes i dette beviset bare er aksiomene i den reduserte akseptanseteorien. I beviset benyttes B8, "Arrow"-aksiomet. Dette aksiomet er vesentlig, uten det kan man ikke vise at <I,Q,f0> oppfyller det sjette kravet i definisjonen av en utvalgsstruktur.

Det spørsmålet som man nå kan stille er om man nå kan gå den motsatte veien Kan man vise at alle aksiomene i den reduserte akseptansetorien kan utledes fra den påstand at <I,Q,f0>, der f0 og Q er definert som tidligere, er en utvalgsstruktur? Såvidt vi kan se kan man ikke dette. Men dersom man legger til følgende to antagelser, hvorav den første er B2,

(i) $Ba(x,y) \rightarrow x,y\hat{e}U$

(ii) $Ba(r,y) \ \& \ \mu(SNu(Mg(z:Ba(z,y)))) \ Inkl \ \mu(x). \rightarrow Ba(x,y)$

kan man faktisk utlede grunnsetningene B3, B5, B6, B8 og B9. Ved hjelp av Teorem 6.2 er det også mulig å vise at det omvendte holder.

Før vi gir bevis for denne setningen skal vi imidlertid bevise det følgende teorem:

Teorem 9.1: Anta (i) <I,V,f> er en utvalgsstruktur, der I er mengden av mulige verdener. Definer en relasjon β ved (ii) $\beta = Mg(<x,y>: x,y\hat{e}Pt(I) \ \& \ y\hat{e}V \ \& \ f(y) \ Inkl \ x)$

Gitt disse forutsetningene har man at β har de følgende egenskaper:

(a) $\beta \ Inkl \ Pt(I)xPt(I)$

© Morten Harboe Rognes 2013

(b) $\langle z,y\rangle \hat{e} \beta$ & $x \hat{e} Pt(I)$ & z Inkl $x \rightarrow \langle x,y\rangle \hat{e} \beta$

(c) $M(\alpha)$ & $\emptyset \neq \alpha$ Inkl $Pt(Pt(I))$ & $(Az)(z \hat{e} \alpha \rightarrow \langle z,y\rangle \hat{e} \beta) . \rightarrow \langle SN(\alpha),y\rangle \hat{e} \beta$

(d) $\langle x,y\rangle \hat{e} \beta \rightarrow x \Omega y \neq \emptyset$

(e) $\langle z,y\rangle \hat{e} \beta \rightarrow \langle y,y\rangle \hat{e} \beta$

(f) $(Ez)(\langle z,y\rangle \hat{e} \beta)$ & $(Ez)(\langle z,x\rangle \hat{e} \beta)$ & x Inkl y & $SN(Mg(z: \langle z,y\rangle \hat{e} \beta)) \Omega x \neq \emptyset$. $\rightarrow SN(Mg(z: \langle z,y\rangle \hat{e} \beta)) \Omega x = SN(Mg(z: \langle z,x\rangle \hat{e} \beta))$

Studerer man denne satsen nærmere ser man at påstandene (a) - (f) er helt analoge med aksiomene B2, B3, B5, B6, B9 og B8.

Bevis: Anta (1) $\langle I,V,f\rangle$ er en utvalgsstruktur og at β er definert som i teoremet. Da har man naturligvis: (2) $\beta = Mg(\langle x,y\rangle: x,y \hat{e} Pt(I)$ & $y \hat{e} V$ & $f(y)$ Inkl $x)$

Ad (a): Dette punkt er trivielt og følger direkte fra definisjonen av β.

Ad (b): Anta (3) $\langle z,y\rangle \hat{e} \beta$ & $x \hat{e} Pt(I)$ & z Inkl x. Ved hjelp av definisjonen av β har man da $z,y \hat{e} Pt(I)$ & $y \hat{e} V$ & $f(y)$ Inkl z. Fra dette og den siste konjunkten i (3) følger $x,y \hat{e} Pt(I)$ & $y \hat{e} V$ & $f(y)$ Inkl x. Ved hjelp av definisjonen av β har vi da $\langle x,y\rangle \hat{e} \beta$

Ad (c): Anta (4) $M(\alpha)$ & $\emptyset \neq \alpha$ Inkl $Pt(Pt(I))$ & $(Az)(z \hat{e} \alpha \rightarrow \langle z,y\rangle \hat{e} \beta)$. Siden vi skal vise $\langle SN(\alpha),y\rangle \hat{e} \beta$ er det tilstrekkelig å vise at (5) $y,SN(\alpha) \hat{e} Pt(I)$ & $y \hat{e} V$ & $f(y)$ Inkl $SN(\alpha)$. Fra (4) følger. siden $\alpha \neq \emptyset$ at $\langle z,y\rangle \hat{e} \beta$ og derfor ved hjelp av definisjonen β at (6) $y \hat{e} V$. Siden α Inkl $Pt(Pt(I))$ følger umiddelbart $SN(\alpha) \hat{e} Pt(I)$. Det gjenstår derfor bare å vise at $f(y)$ Inkl $SN(\alpha)$. For dette formål vil det være tilstrekkelig å vise:

(6) $(Ar)(r \hat{e} f(y) \rightarrow (Az)(z \hat{e} \alpha \rightarrow r \hat{e} z))$. Anta derfor for vilkårlige r,z at $r \hat{e} f(y)$ & $z \hat{e} \alpha$. Fra dette følger ved hjelp av (4) at $\langle z,y\rangle \hat{e} \beta$. Herav har man ved hjelp av definisjonen av β $f(y)$ Inkl z. Siden $r \hat{e} f(y)$ følger da $r \hat{e} z$. Dette viser at (6) holder. Det følger at (5) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for punkt (c).

Ad (d): Anta$\langle x,y\rangle \hat{e} \beta$. Det følger da ved hjelp av definisjonen av β at $x,y \hat{e} Pt(I)$ & $y \hat{e} V$ & $f(y)$ Inkl x. Siden $y \hat{e} V$ og $\langle I,V,f\rangle$ er en utvalgsstruktur har vi $\emptyset \neq f(y)$ Inkl y. Sammen med det at $f(y)$ Inkl x følger herav at $x \Omega y \neq \emptyset$.

Ad (e): Anta $\langle z,y\rangle \hat{e} \beta$. Da følger ved hjelp av definisjonen av β $z,y \hat{e} Pt(I)$ & $y \hat{e} V$ & $f(y)$ Inkl z. Siden $y \hat{e} V$ har vi fra definisjonen av utvalgsstruktur og (1) at $f(y)$ Inkl y. Siden $y \hat{e} Pt(I)$ & $y \hat{e} V$ har vi da $\langle y,y\rangle \hat{e} \beta$.

Ad (f): Anta (7) $(Ez)(\langle z,y\rangle \hat{e} \beta)$ & $(Ez)(\langle z,x\rangle \hat{e} \beta)$ & x Inkl y og at

(8) $SN(Mg(z: \langle z,y\rangle \hat{e} \beta)) \Omega x \neq \emptyset$. Fra (7) følger ved hjelp av definisjonen av β at

(9) $y,x \hat{e} Pt(I)$ & $y,x \hat{e} V$. La oss vise: (+) $(Av)(v \hat{e} V \rightarrow SN(Mg(z: \langle z,v\rangle \hat{e} \beta)) = f(v))$

Anta derfor for vilkårlig v at (11) $v \hat{e} V$. Anta videre for vilkårlig r at (12) $r \hat{e} f(v)$. Anta videre for vilkårlig z at $\langle z,v\rangle \hat{e} \beta$. Da følger ved hjelp av definisjonen av β at

(13) $z,v \hat{e} Pt(I)$ & $v \hat{e} V$ & $f(v)$ Inkl z. Fra dette og (12) har vi $r \hat{e} z$. Men z var vilkårlig element der $\langle z,v\rangle \hat{e} \beta$. Det følger at $(Az)(z \hat{e} Mg(z: \langle z,v\rangle \hat{e} \beta) \rightarrow r \hat{e} z)$. Men da $r \hat{e} SN(Mg(z: \langle z,v\rangle \hat{e} \beta))$. Dette viser at den ene halvdelen av (+) holder. Anta på den annen side for vilkårlig r at

(14) $(Az)(\langle z,v\rangle \hat{e} \beta \rightarrow r \hat{e} z)$. Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av β at

(15) $(Az)(z,v \hat{e} Pt(I)$ & $v \hat{e} V$ & $f(v)$ Inkl $z \rightarrow r \hat{e} z)$. Nå har vi kraft av (11) at $v \hat{e} V$ og derfor at $v,f(v) \hat{e} Pt(I)$. Siden $f(v)$ Inkl $f(v)$ følger derfor ved hjelp av (15) at $r \hat{e} (v)$. Dette viser den andre halvdelen i (+). Siden v var et vilkårlig element som oppfylte (11) kan man konkludere med at (+) holder.

Fra (7) følger ved hjelp av definisjonen av β at (16) $x,y \hat{e} V$ & x Inkl y. Siden $y \hat{e} V$ har vi fra (+) at $SN(Mg(z: \langle z,y\rangle \hat{e} \beta)) = f(y)$. Fra dette og (8) følger $f(y) \Omega x \neq \emptyset$. Herav kan man

© Morten Harboe Rognes 2013

ved hjelp av (16) og det siste kravet i definisjonen av en utvalgsstruktur slutte f(y)Ωx= f(x). Men fra dette og (+) følger, siden x,yêV at

SN(Mg(z: <z,y>êβ))Ωx= SN(Mg(z: <z,x>êβ))

Dette viser at punkt (f) lar seg utlede på basis av premissene i teoremet.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi går nå over til beviset for den påstand som vi nevnte tidligere, nemlig den påstand at dersom <I,Q,f0>, der f0 og Q er definert som tidligere, og man forutsetter at B2 og

(Ay)(Ba(r,y) & μ(SNu(Mg(z:Ba(z,y))) Inkl μ(x). → Ba(x,y))

så kan man utlede B3, B5, B6, B8 og B9. Vi formulerer denne satsen slik:

Teorem 9.2: Anta B2 holder og anta

(i) (Ay)((Er)Ba(r,y) & μ(SNu(Mg(z: Ba(z,y)))) Inkl μ(x) &xêU → Ba(x,y))

Definer funksjonen Q og f ved henholdsvis

(ii) Q= Mg(x: (Ez)(Ba(z,μ;-1(x))))

(iii) f= Mg(< x, <μ(SNu(Mg(z:Ba(z, μ;-1(x)))))>: xêQ)

Da har man at <I,Q,f> er en utvalgsstruktur hvis og bare hvis man har at

B3, B5, B6, B8 og B9 holder.

Bevis: *(a)* Anta forutsetningene i teoremet holder og at <I,Q,f> er en utvalgsstruktur. Vi skal da vise at de aksiomene B3,B5,B6, B8 og B9 holder. Dette følger umiddelbart ved hjelp av Teorem 9.1 om vi kan vise at

(1) B(μ;-1(x),μ;-1(y)) ↔ x,yêPt(I) & yêQ & f(y) Inkl x

Vi viser først kondisjonalen mot høyre. Anta (2) B(μ;-1(x),μ;-1(y)) . Da har man åpenbart at μ;-1(x) êMg(r: Ba(r,μ;-1(y)) og derfor at

μ(SNu(Mg(r: Ba(r,μ;-1(y))))) Inkl μ(μ;-1(x)) =x.

Men fra dette og definisjonen av f følger f(y) Inkl x siden y åpenbart er med i Q i lys av definisjonen av Q. Videre er det trivielt at x,yêPt(I).

Anta på den annen side at (3) x,yêPt(I) & yêQ & f(y) Inkl x. Siden yêQ følger det at det finnes r slik at (4) Ba(r,μ;-1(y)). Fra det at yêQ følger ved hjelp av forutsetning (iii) i teoremet at f(y) = μ(SNu(Mg(z:Ba(z, μ;-1(y))))). Fra dette og den tredje konjunkten i (3) kan man slutte at (5) μ(SNu(Mg(z: Ba(z,μ;-1(y))))) Inkl x =μ(μ;-1(x)). Fra (4), (5) og forutsetning (i) i teoremet følger så B(μ;-1(x),μ;-1(y)). Dette viser at (1) holder. Vi har dermed vist den ene halvdelen av teoremet.

(b) I lys av Teorem 6.2 har man at den andre halvdelen av teoremet holder.

Det kan imidlertid være av interesse å vise at forutsetning (i) i teoremet kan utledes på basis av grunnsetningene i den minimale akseptanseteorien. Anta derfor:

(6) (Er)Ba(r,y) & μ(SNu(Mg(z: Ba(z,y)))) Inkl μ(x) &xêU for vilkårlig y. Sett per definisjon: α = Mg(z: Ba(z,y)). Fra (6) følger da at α≠ø. Videre har vi åpenbart at (az)(zêα → Ba(z,y)). Fra dette følger ved hjelp av B5 at Ba(SNu(α),y). Fra dette, (6) og B3 følger så umiddelbart Ba(x,y).

Dermed har vi levert et fullstendig bevis for teoremet. **QED**.

Så langt har vi sett på forholdet mellom den reduserte akspetanseteorien og utvalgsstrukturer.

La oss nå si noen ord om forholdet mellom utvalgsstrukturer og den minimale

© Morten Harboe Rognes 2013

akseptanseteorien. Kaller man et triple <E,V,f> som oppfyller kravene (i) - (v) i Definisjon 6.1 for en minimal utvalgsstruktur kan man si at den minimale akseptanseteorien forholder seg til minimale utvalgsstrukturer på samme måte som den reduserte akseptansetorien forholder seg til utvalgsstrukturer. Hvis vi istedet for "utvalgsstruktur" setter inn "minimal utvalgsstruktur" i Teorem 9.1 og fjerner punkt (f) vil den sats som fremkommer fremdeles være riktig. Vi har altså:

Teorem 9.3: Anta (i) <I,V,f> er en minimal utvalgsstruktur, der I er mengden av mulige verdener. Definer en relasjon β ved (ii) β = Mg(<x,y>: x,yêPt(I) & yêV & f(y) Inkl x)

Gitt disse forutsetningene har man at β har de følgende egenskaper:

(a) β Inkl Pt(I)xPt(I)

(b) <z,y>êβ & xêPt(I) & z Inkl x → <x,y>êβ

(c) M(α) & ø≠α Inkl Pt(Pt(I)) & (Az)(zêα → <z,y>êβ). → <SN(α),y>êβ

(d) <x,y>êβ → xΩy ≠ø

(e) <z,y>êβ → <y,y>êβ

Man ser at punktene (a) - (e) svarer til grunnsetningene i den minimale akseptanseteorien, nemlig setnngene B2, B3, B5, B6 og B9

Det er overflødig å gi noe eksplisitt bevis for denne påstanden siden det bare var i forbindelse med beviset for punkt (f) i Teorem 9.1 at vi hadde bruk for det siste punktet i Definisjon 6.1 av utvalgsstruktur.

På tilsvarende vis kan man revidere Teorem 9.2 til

Teorem 9.4: Anta B2 holder og anta

(i) (Ay)((Er)Ba(r,y) & μ(SNu(Mg(z: Ba(z,y)))) Inkl μ(x) &xêU → Ba(x,y))

Definer funksjonen Q og f ved henholdsvis

(ii) Q= Mg(x: (Ez)(Ba(z,μ;-1(x))))

(iii) f= Mg(< x, <μ(SNu(Mg(z:Ba(z, μ;-1(x)))))>: xêQ)

Da har man at <I,Q,f> er en minimal utvalgsstruktur hvis og bare hvis man har at B3, B5, B6 og B9 holder.

Den minimale akseptanseteorien og den reduserte akseptanseteorien er naturligvis svakere enn teorien B;1. At aksiomene i disse teoriene umiddelbart virker mer plausible og innlysende enn de øvrige aksiomer i B;1, nemlig B10, B11 og B12, impliserer ikke at disse siste aksiomene er feilaktige eller uten enhver plausibilitet.

Man kan vanskelig benekte at teorien B;1* hvis aksiomer er B2 og B14 virker som en relativt avrundet, elegant og "kompakt" teori. Kan man ikke vise at man fra denne teori kan utlede noen åpenbare absurditeter, noe som virker rimelig, er det ingen grunn til å avvise B10- B12.

Når vi i denne paragrafen har omtalt forholdsvis utførlig den minimale og den reduserte akseptanseteori er det hovedsakelig av systematiske grunner.

La oss nå fremsette noen bemerkninger i forbindelse med teorien B;2*. Som man husker var de var de viktigste primitive predikatene i denne teorien de to predikatene "Ba(x,y)" og "En(x,y)", "x er en verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen y".

© Morten Harboe Rognes 2013

Aksiomene i teorien B;2 impliserer at enkelhetsrelasjonen En er en preferanserelasjon over mengden av mulige verdener I. Dette er i visse henseende en ganske sterk antagelse. Den innebærer at I kan spaltes opp i et system av innbyrdes disjunkte, ikke-tomme ekvivalensmengder som samlet uttømmer I og der denne mengden av ekvivalensmengder kan ordnes lineært. Alle verdener i den samme ekvivalensmengde er like enkle og er en ekvivalensmengde rangert over en annen er ethvert element i den første enklere enn ethvert element i den andre. En verden w er minst like enkel som en verden w' hvis og bare hvis w og w' tilhører samme ekvivalensklasse eller w' tilhører en ekvivalensmengde som er lavere rangert med hensyn på enkelhet enn den ekvivalensmengden w tilhører. De tre første aksiomene i B;2* impliserer dette.

Sett i dette perspektiv er det derfor rimelig å spørre om man ikke kan avsvekke denne teorien. Av aksiomene En0, En1 og En2 er aksiomene En1 og En2, som henholdvis postulerer at En er en total og en transitiv relasjon, det som gjør En til en preferanserelasjon. Kravet om totalitet, eller at relasjonen skal være sammenhengende, er imidlertid sterkt, og som vi nevnte, ikke direkte opplagt. Derimot er kravet om at En er transitiv nærmest trivielt.

La oss nå se på den teorien som har samme språk som B;2*, men der vi (i) bare krever at En skal være en preordning over mengden av mulige verdener, det vil si en refleksiv og transitiv relasjon over I, (ii) beholder enkelhetsprinsippet En3 og (iii) rett og slett fjerner E4. Aksiomene i denne teorien vi da være:

En0 $(Ax)(Ay)(En(x,y) \rightarrow x,y\hat{e}I$
En1' $(Ax)(x\hat{e}I \rightarrow En(x,x))$
En2 $(Ax)(Ay)(Az)(En(x,y) \,\&\, En(y,z) \rightarrow En(x,z))$
En3 $B(x,y) \leftrightarrow x,y\hat{e}U \,\&\, Max(R;e,\mu(y))$ Inkl $\mu(x)$

La oss kalle denne teorien for den reduserte versjon av B;2*. Betegner vi den med "B;2*-" kan den formelt sett defineres presist slik:

$B;2^*- = ZFC;u(L;e(\Delta;5))[\theta;0 \cup \{En0, En1', En2, En3\}]$

Det man nå kan vise er at i denne teorien kan man utlede alle grunnsetningene i den reduserte verson av B;1, dette innebærer at man kan vise at B2, B3, B5, B6, B8 og B9 holder. Dessuten er det også lett å gi moteksempler til prinsippene B11 og B12. Vi kan sammenfatte den første påstanden i det følgende teorem:

Teorem 9.5: I teorien B;2*- kan man utlede: B2, B3, B5, B6, B8 og B9, kort sagt B1 - B12.

Bevis: Det er ikke nødvendig å gjennomføret beviset for denne påstanden i detalj. Siden vi her tar vårt utgangspunkt i B;2*- følger det at $B(x,y) \leftrightarrow x,y\hat{e}U \,\&\, Max(R;e,\mu(y))$ Inkl $\mu(x)$. Beviset for at man fra dette og de ørige aksiomer i denne teorien kan utlede de aksiomene som er nevnt satsen kan føres på nesten nøyaktig samme måte som i beviset for Teorem 6.14. Stort sett kan man i de ni første punktene i dette beviset bare erstatte "R" med "R;e" og alle henvisninger til aksiom B14 med henvisninger til En3. Studerer man beviset for Teorem 6.14 ser man dessuten at svært få av egenskapene til R brukes for å vise at B1 - B9 lar seg etlede i B;1. Det eneste stedet er i forbindelse med beviset for B8. I den siste delen av dette beviset, når man her skal godtgjøre formelen (++) benytter man seg av at R er transitiv. Det er forøvrig

© Morten Harboe Rognes 2013

bare ved bevisene for at B11 og B12 lar seg utlede i B;1 at man trenger den opplysning at R er total. **QED**.

Det er forøvrig ganske lett å vise at B11 og B12 ikke lar seg utlede i B;2*-. Vi skal gi to uformelle argumenter. La oss først studere B11. Det skulle være klart at det er konsistent med B;2*- at det kan finnes et utsagn u0 der vi har μ(u0) = {w,w'} der w≠w'. Det er heller intet i veien for at man konsistent kan anta at R;e begrenset til μ(u0) er {<w,w>, <w',w'>}. Man har altså at wR;ew og w'R;ew', men man har hverken wR;ew' eller w'R;ew. I så fall kan det, som man lett innser ikke finnes noen R;e-maksimale elementer i μ(u0). I kraft av En3 har vi da ¬(Ez)Ba(z,u0). Men μ(u0) er en endelig ikke-tom mengde. Det følger at B11 ikke holder.

Gjør vi de samme antagelser om u0 og R;e begrenset til μ(u0), skulle det være lett å se at vi har (1) wêμ(u0). Er da zêμ(u0) & z≠w må man åpenbart ha at z=w'. Men man kan ikke da ha Ba(μ;-1({z}), μ;-1({z,w})) siden {z,w} ={w,w'} & Max(R;e,{w,w'})=ø. Det følger at vi har (2) (Az)(zêμ(u0) & z≠w → ¬ Ba(μ;-1({z}), μ;-1({z,w}))). På den annen side har vi også, siden Max(R;e,{w,w'})=Max(R;e,μ(u0))=ø, at ¬(Ez)Ba(z,μ(y)). Det følger at B12 ikke holder under disse omstendigheter. Det er altså mulig å finne modeller for B;2*- der hverken B11 eller B12 holder. Disse setningene kan derfor ikke utledes i B;2*-.

§10 To spesielle teser

Teorien B;2* impliserer at det finnes en preferanserelasjon R;e over mengden av alle mulige verdener I. Man kan si at det er dette aksiomene En0, En1 og En2 sier.

Følgende gjelder generelt dersom R er en preferanserelasjon over en mengde X. For det første induserer en slik preferanserelasjon en ekvivalensrelasjon over X, nemlig relasjon L(R), som er mengden av alle de par <x,y> der xRy & yRx. L(R) vil i sin tur inndele X i en mengde av ikke-tomme, innbyrdes disjunkte L(R)-ekvivalensmengder som samlet uttømmer X. Man kan kalle disse ekvivalensmengdene for preferansenivåene bestemt av preferanserelasjonen R. På den annen side vil også preferanserelasjonen R ordne disse preferansenivåene i en lineær ordning.

Gitt en preferanserelasjon R er det derfor to tilfelle som er av spesiell interesse. Det ene tilfelle er når preferanserelasjonen over X bestemmer utelukkende ett preferansenivå som utgjør hele X. Det andre tilfelle er når preferanserelasjonen er slik at hvert preferansenivå skrumper inn slik at det bare inneholder nøyaktig ett element. Da vil R i alt vesentlig utgjøre en lineær ordning av X. Fra en teoretisk synsvinkel er det derfor interessant å undersøke disse to tilfellene i forbindelse med preferanserelasjonen R;e i teorien B;2*. Det er dette vi vil gjøre i denne paragrafen.

Vi skal først betrakte en tese som man kan vise at er ekvivalent med den første muligheten. Dernest skal vi betrakte en tese som er ekvivalent med at preferanserelasjonen R;e er en lineær ordning av I. Resultatene vil bli sammenfattet i to teoremer, nemlig Teorem 10.1 og Teorem 10.2 nedenfor. I tillegg vil vi betrakte ytterligere to teoremer som representerer generaliseringer av disse resultatene.

Den første tesen kan formuleres slik: Anta x er et konsistent utsagn som noe bør aksepteres relativt til. Da bør et utsagn aksepteres relativt til utsagnet x hvis og bare hvis utsagnet er en logisk konsekvens av x. Denne tesen kan uttrykkes mer formelt på den følgende måte:

(A) (Ax)(xêU & μ(x)≠ø & (Ez)Ba(z,x). → (Ay)(Ba(y,x) ↔ μ(x) Inkl μ(y)))

© Morten Harboe Rognes 2013

Man kan formulere en variant av (A) ved å fjerne forbeholdet "(Ez)Ba(z,x)" i antesedenten. Da får man:

(A*) $(Ax)(x\hat{e}U \,\&\, \mu(x)\neq\emptyset \,.\rightarrow (Ay)(Ba(y,x) \leftrightarrow \mu(x)\ \text{Inkl}\ \mu(y)))$

Vi skal betrakte disse tesene i forbindelse med teorien man får når man fjerner aksiomet En4 fra teorien B;2*. I denne teorien kan man vise at såvel (A) og (A*) er ekvivalent med den påstand at enkelhetsrelasjonen R;e er identisk med IxI. Dette innebærer at (A) og (A*) er ekvivalente med den påstand at alle mulige verdener er like enkle, med andre ord at det finnes et og bare et enkelhetsnivå. Hvis man mener dette alvorlig kan man spørre om hva som er poenget med å innføre noen enkelhetsrelasjon og det kompliserte apparat som vi har studert ovenfor. Akseptanseteorien kunne da forenkles betraktelig ved ganske enkelt å definere uttrykket "Ba(y,x)" ved å si at utsagnet y bør aksepteres relativt til utsagnet x hvis og bare hvis x er et konsistent utsagn som impliserer y. Naturligvis er en slik teori absurd og den innebærer at vi ikke bør akseptere noe som ikke er en logisk konsekvens av alt det vi vet på forhånd.

Det resultat vi nettopp har nevnt kan formuleres slik:

Teorem 10.1: Anta T er teorien B;2* med aksiom En4 fjernet. I denne teori kan man vise at følgende tre påstander er ekvivalente:

(i) $(Ax)(x\hat{e}U \,\&\, \mu(x)\neq\emptyset \,\&\, (Ez)Ba(z,x).\rightarrow (Ay)(Ba(y,x) \leftrightarrow \mu(x)\ \text{Inkl}\ \mu(y)))$

(ii) $(Ax)(x\hat{e}U \,\&\, \mu(x)\neq\emptyset \,.\rightarrow (Ay)(Ba(y,x) \leftrightarrow \mu(x)\ \text{Inkl}\ \mu(y)))$

(iii) $R;e = IxI$

Bevis: Det vil være nok å vise at (i) impliserer (iii) og (iii) impliserer (ii) siden det er åpenbart at (ii) impliserer (i).

(a) Anta derfor at

(1) $(Ax)(x\hat{e}U \,\&\, \mu(x)\neq\emptyset \,\&\, (Ez)Ba(z,x).\rightarrow (Ay)(Ba(y,x) \leftrightarrow \mu(x)\ \text{Inkl}\ \mu(y)))$ og anta for reduktio ad absurdum at (2) $\neg(R;e = IxI)$ Siden R;e åpenbart er inkludert i IxI er (2) ekvivalent med $\neg(IxI\ \text{Inkl}\ R;e)$. Dette innebærer i sin tur at $\neg\,(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}I \rightarrow xR;e\ y)$. Dette siste impliserer at det finnes x,y der (3) $x,y\hat{e}I \,\&\, \neg(xR;e\ y)$. Siden R;e er en preferanserelasjon er R;e total ifølge En1 og vi kan derfor slutte fra (3) at følgende holder: (4) $yR;e\ x \,\&\, \neg(x\ R;ey)$. Siden {x,y} inkl I og R er en preferanserelasjon følger fra dette at (5) $Max(R;e, \{x,y\}) = \{y\}$. Fra dette kan man så slutte (6) $\emptyset \neq Max(R;e, \{x,y\})\ \text{Inkl}\ \{y\}$ La oss per definisjon sette $u1= \mu;\text{-}1(\{x,y\})$ og $u2= \mu;\text{-}1(\{y\})$. Fra dette, (6) og En3 følger da (7) $Ba(u2,u1)$. Siden $\mu(u1)\neq\emptyset \,\&\, u1\hat{e}U$ følger da ved hjelp av (1) og (7) at $\mu(u1)\ \text{Inkl}\ \mu(u2)$. Dette impliserer $\{x,y\}\ \text{Inkl}\ \{x\}$ som åpenbart er umulig siden (4) impliserer at $x\neq y$. Man ser at (2) leder til en motsigelse. Vi har derfor at (i) impliserer (iii).

(b) Anta på den annen side at (8) $R;e = IxI$. og anta videre at (9) $x\hat{e}U \,\&\, \mu(x)\neq\emptyset$. Det følger da i lys av definisjonen av "Max(R;e, α)" at (10) $Max(R;e, \mu(x)) = \mu(x)$. Anta for vilkårlig z at $Ba(z,x)$. Da har vi ved hjelp av En3 at (11) $Max(R;e,\mu(x))\ \text{Inkl}\ \mu(z)$. Fra (10) og (11) følger $\mu(x)\ \text{Inkl}\ \mu(z)$. Anta på den annen side at $\mu(x)\ \text{Inkl}\ \mu(z)$. Da følger ved hjelp av (9) og (10) at $\emptyset\neq Max(R;e,\mu(x))\ \text{Inkl}\ \mu(z)$. Men fra dette følger ved hjelp av En3 at $Ba(z,x)$. Vi har dermed vist at at (iii) impliserer (ii).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

© Morten Harboe Rognes 2013

Forutsetningen i satsen ovenfor sier at T er B;2* med grunnsetningen En4 fjernet. Hvis man aksepterer En4, det vil si arbeider innenfor B;2* kan man selvfølgelig også utlede at A og A* er ekvivalente med R;e=RxR. Fra En4 følger imidlertid at det finnes en sekvens av verdener der hver verden i sekvensen er mer komplisert enn den foregående. Hvis dette er tilfelle holder selvfølgelig ikke R;e=IxI. Man kan derfor i B;2*, hvor En4 per definisjon er et av aksiomene, utlede negasjonen av A og A*.

La oss nå gå over til den andre litt spesielle tesen vi vil betrakte. Denne tesen sier at dersom x er et utsagn som noe bør aksepteres relativt til og y er et vilkårlig utsagn så er det enten slik at y bør aksepteres relativt til x, eller slik at negasjonen av y bør aksepteres relativt til utsagnet x. La oss kalle mengden av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til et utsagn x for akseptansesystemet til x. Påstanden uttrykker da at ethvert utsagn som noe bør aksepteres relativt til har et akseptansesystem som er en komplett teori. Tesen kan formuleres formelt på den følgende måte:

(B) $(Ez)Ba(z,x) \rightarrow (Ay)(y\hat{e}U \rightarrow Ba(y,x) \vee Ba(Neg(y),x))$

I teorien B;2* kan man vise at denne påstanden er ekvivalent med at preferanserelasjonen R;e er en lineær ordning. Man kan faktisk vise at B er ekvivalent med følgende påstand:

$(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}I \rightarrow (xR;e^* y \vee x=y \vee yR;^*e x))$

Vi formulerer dette som et eget teorem:

Teorem 10.2: (B;2*) Man har at de følgende to påstander er ekvivalente:

(i) $(Ax)[(Ez)Ba(z,x) \rightarrow (Ay)(y\hat{e}U \rightarrow Ba(y,x) \vee Ba(Neg(y),x))]$

(ii) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}I \rightarrow (xR;e^* y \vee x=y \vee yR;^*e x))$

Bevis: (a) Vi viser først at (i) impliserer (ii). Anta derfor at at (i) holder og anta for reduktio ad absurdum at (1) $x,y\hat{e}I \ \& \ \neg(xR;e^* y) \ \& \ x\neq y \ \& \ \neg(y \ R;e^* x)$, Ved hjelp av definisjonen av R;e* følger fra dette $(xR;e\ y \rightarrow yR;e\ x) \ \& \ (y \ R;e\ x \rightarrow xR;e\ y)$. Herav har vi naturligvis $xR;ey \leftrightarrow yR;e\ x$. Siden R;e er total følger herav $xR;e\ y \ \& \ yR;e\ x$ med andre ord
(2) $x \ L(R;e) \ y$. Vi definerer nå tre utsagn u0, u1 og u2 ved å sette:

(3) $u0 = \mu;\text{-}1(\{x,y\}) \ \& \ u1 = \mu;\text{-}1(\{x\}) \ \& \ u2 = \mu;\text{-}1(\{y\})$

Fra (2) og definisjonen av operasjonen Max følger (4) $\emptyset \neq Max(R;e,\{x,y\}) = \{x,y\}$. Fra dette kan man slutte:

(5.1) $\neg(\emptyset \neq Max(R;e,\mu(u0))\ Inkl\ \mu(u1))$

(5.2) $\neg(\emptyset \neq Max(R;e,\mu(u0))\ Inkl\ (I\text{-}\ \mu(u1)))$

Fra dette følger ved hjelp av En3, siden u0 - u2êU at (6) $\neg Ba(u1,u0) \ \& \ \neg Ba(Neg(u1),u0)$. Men vi har åpenbart i lys av (4) at $(Ez)Ba(z,u0)$. Fra dette, det at u0êU og (6) følger åpenbart at (i) ikke holder. Dette strider mot vår antagelse om at (i) holder. Dette viser at (i) impliserer (ii).

(b) La oss nå vise at (ii) impliserer (i). Anta derfor
(7) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}I \rightarrow (xR;e^* y \vee x=y \vee yR;^*e x))$ og anta for vilkårlig x at
(8) $(Ez)Ba(z,x)$. Fra (8) og En3 kan man slutte at (9) $\emptyset \neq Max(R;e,\mu(x))$ Fra dette har vi at det må finnes w slik at (10) $w\hat{e}\ Max(R;e,\mu(x))$. Hadde vi nå at det fantes to distinkte elementer i $Max(R;e,\mu(x)$, la oss si a og b der $a\neq b$ ville det følger at $a \ L(R;e) \ b$. Men dette

© Morten Harboe Rognes 2013

strider mot (7). Derfor har vi (11) Max(R;e,μ(x)) = {w} ≠ø. Anta nå (12) yêU for vilkårlig y. Da har vi wêμ(y) v wêμ(Neg(y)). Det følger at vi må ha i lys av (11)

(13) ø≠ Max(R;e,μ(x)) Inkl μ(y). v ø≠ Max(R;e,μ(x)) Inkl μ(Neg(y)). Herav følger Ba(y,x) v Ba(Neg(y),x). Men siden y var et vilkårlig utsagn, jmf. (12), følger det at (1) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi vil nevne ytterligere to resultater i forbindelse med dem vi har gitt bevis for ovenfor. De kan begge oppfattes som generaliseringer av Teorem 10.1 og Teorem 10.2.

Først er det hensiktsmessig å gi en presis definisjon av hva vi mener med en *lineær ordning*. Med en lineær ordning R over en mengde X forstås en relasjon R Inkl XxX som oppfyller de følgende krav

(a) (Ax)(Ay)(x,yêX → xRy v x=y v yRx)
(b) (Ax)(xêX → ¬(xRx))
(c) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêX & xRy & yRz → xRz)

Man ser fra denne definisjonen at en lineær ordning R over en mengde X er en relasjon som er sammenhengende, irrefleksiv og transitiv.

Det bør noteres at dersom R er en preferanserelasjon over I, mengden av mulige verdener, er ikke R* nødvendigvis noen lineær relasjon. Dette er fordi man ikke fra det at R er en preferanserelasjon kan slutte at R* er sammenhengende. Er x og y to mulige verdener og R en preferanserelasjon, kan man riktignok slutte at dersom hverken xR*y eller yR*x er tilfelle så er x L(R)y tilfelle, det vil si at x er "like bra" som y. Men fra dette kan man ikke slutte at x er identisk med y. Det er bare om man kan vise at Mg(y: y L(R) x) inneholder nøyaktig ett og bare ett element for alle xêI at man fra det at R er en preferanserelasjon kan slutte at R* er sammenhengende og derfor en lineær ordning.

Er R en relasjon over X og og a en delmengde av X betegner vi restriksjonen av R til a med "Rest(R,a)". Uttrykket er definert ved Rest(R,a) = RΩ(axa)

Vårt første teorem kan oppfattes som en generalisering av Teorem 10.2. Satsen kan formuleres slik:

Teorem 10.3: (B;2*) Anta xêU & μ(x)≠ø . Da har man at de følgende to betingelser er ekvivalente:

(i) Rest(R;e*, μ(x)) er en lineær ordning over μ(x)
(ii) (Ay)(yêU & (Ez)Ba(z,K(y,x)). →
(Az)(zêU → Ba(z,K(y,x)) v Ba(Neg(z), K(y,x))))

Dette teoremet uttrykker at dersom den strenge enkelhetsrelasjonen over I er en lineær ordning når den begrenses til sannhetsmengden til utsagnet x, så innebærer dette at dersom y er et vilkårlig utsagn og noe bør aksepteres relativt til K(y,x) så er mengden av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til konjunksjonen av K(y,x) en komplett teori[10]. Teoremet

10 Er Δ en mengde med utsagn kaller vi Δ for en komplett teori om den oppfyller følgende to krav: (i) Δ er konsistent, dvs. det finnes en mulig verden hvor alle utsagnene i Δ er sanne. (ii) For ethvert utsagn y har man enten at y er en logisk konsekvens av utsagnene i Δ eller så har man at Neg(y) er en logisk konsekvens

© Morten Harboe Rognes 2013

uttrykker også at det omvendte holder.

Setter man i denne satsen x= μ;-1(I) ser man lett at vi får som resultat Teorem 10.2.

Bevis: Anta xêU & μ(x)≠ø (a) Vi viser først at (ii) impliserer (i). Anta derfor at at (i) holder og anta for reduktio ad absurdum at

(1) w,w'êμ(x) & ¬(wR;e* w') & w≠w' & ¬(w' R;e* w) ,

Ved hjelp av definisjonen av R;e* følger fra dette at

(wR;e w' → w'R;e w) & (w' R;e w → wR;e w').

Herav har vi naturligvis wR;ew' ↔ w'R;e w. Siden R;e er total følger herav wR;e w' & w'R;e w med andre ord (2) w L(R;e) w'. Vi definerer nå tre utsagn u0, u1 og u2 ved å sette:

(3) u0 = μ;-1({w, w'}) & u1 = μ;-1({w}) & u2 = μ;-1({w'})

Fra (2) og definisjonen av operasjonen Max følger (4) ø ≠ Max(R;e,{w,w'}) = {w,w'}. Fra (1) følger {w,w'} Inkl μ(x). Vi har derfor at K(u0,x)=u0. Fra dette og (4) kan man slutte, siden w≠w':

(5.1) ¬(ø ≠ Max(R;e,μ(K(u0,x))) Inkl μ(u1))

(5.2) ¬(ø ≠ Max(R;e,μ(K(u0,x))) Inkl (I- μ(u1)))

Fra dette følger ved hjelp av En3, siden u0 - u2êU at

(6) ¬Ba(u1,K(u0,x)) & ¬Ba(Neg(u1),K(u0,x)).

Men vi har åpenbart i lys av (4) at (Ez)Ba(z,K(u0,x)). Fra dette, det at u0êU og (6) følger åpenbart at (ii) ikke holder. Dette strider mot vår antagelse om at (ii) holder. Dette viser at (ii) impliserer (i).

(b) La oss nå vise at (i) impliserer (ii). Anta derfor

(7) (Aw)(Aw')(w,w'êμ(x) → (wR;e* w' v w=w' v w'R;*e w)) og anta for vilkårlig y at

(8) (Ez)Ba(z,K(y,x)). Fra (8) og En3 kan man slutte at (9) ø≠ Max(R;e,μ(K(y,x)) Fra dette har vi at det må finnes w slik at (10) wê Max(R;e,μ(K(y,x))). Hadde vi nå at det fantes to distinkte elementer i Max(R;e,μ(K(y,x)), la oss si a og b der a≠b ville det følger at a L(R;e) b. Men dette strider mot (7). Derfor har vi (11) Max(R;e,μ(K(y,x))) = {w} ≠ø. Anta nå (12) zêU for vilkårlig z. Da har vi wêμ(z) v wêμ(Neg(z)). Det følger at vi må ha i lys av (11)

(13) ø≠ Max(R;e,μ(K(y,x))) Inkl μ(y). v ø≠ Max(R;e,μ(K(y,x))) Inkl μ(Neg(y)).

Herav følger Ba(z,K(y,x)) v Ba(Neg(z),K(y,x)). Men siden z var et vilkårlig utsagn, jmf. (12), følger det at (1) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det andre teoremet er relatert på en lignende måte til det første teoremet vi beviste i dette avsnittet, nemlig Teorem 10.1. Det kan som nevnt oppfattes som en generalisering av Teorem 10.1. Satsen kan formuleres slik:

Teorem 10.4: (B;2*) Anta xêU & μ(x)≠ø. Da er følgende to betingelser ekvivalente:

(i) (Aw)(Aw')(w,w'êμ(x) → wR;ew')

(ii) (Ay)[yêU & (Ez)Ba(z,K(y,x)). →
(Az)(zêU →. Ba(z,K(y,x)) ↔ μ(K(y,x)) Inkl μ(z)))]

av utsagnene i Δ. Betegner vi mengden av alle de utsagn som er logiske konsekvenser av utsagnene i mengden Δ med "k(Δ)" kan det siste kravet formuleres slik: (Ay)(yêU →. yêk(Δ) v Neg(y)êk(Δ)). Se forøvrig Rognes [3].

© Morten Harboe Rognes 2013

Setter man x=μ;-1(I) i denne satsen ser man at den første betingelsen er ekvivalent med R;e= IxI. Videre ser man at dersom x=μ;-1(I) er den siste konjunkten i (ii) ekvivalent med

(+) (Ay)[yêU & (Ez)Ba(z,y). →(Az)(zêU →. Ba(z,y) ↔ μ(y) Inkl μ(z)))]

Teorem 10.1 er derfor et korollar til dette teoremet.

Bevis: Anta xêU & μ(x)≠ø. *(a)* Anta at (ii) holder og anta for reduktio ad absurdum at (i) ikke holder. Fra det siste følger at (1) ¬(Aw)(Aw')(w,w'êμ(x) → wR;e w'). Fra dette følger at det må finnes w,w' der vi har (2) w,w'êμ(x) & ¬(wR;e w'). Siden R;e er en preferanserelasjon følger fra dette at (3) w' R;e* w. Siden w,w'êμ(x) har vi (4) {w,w'} Inkl μ(x). La oss sette (5) u=μ;-1({w,w'}). Da har vi uêI. Videre har vi at (6) K(u,x) = u. Fra (3) og (5) følger (7) Max(R;e, μ(u)) = {w'}≠ø. Det følger fra dette og (6) at (8) (Ez)Ba(z,K(u,x)). Sett u0= μ;-1({w'}). Da har vi ved hjelp av (7) at Max(R;e,μ(u)) Inkl μ(u0). Fra dette kan man ved hjelp av En3 slutte at Ba(u0,u) og derfor Ba(u0, K(u,x)). Men fra dette, (8) og (i) følger μ(K(u,x)) Inkl μ(u0). Siden μ(K(u,x))= {w,w'} og μ(u0)={w'} har vi {w,w'} Inkl {w}. Men dette er åpenbart umulig siden det fra (3) og det at R;e er en preferanserelasjon følger at w≠w'. Det følger at det er umulig at (i) ikke holder.

(b) La oss så vise at (i) impliserer (ii). Anta (i) holder. Anta for vilkårlig y at (1) yêU & (Ez)Ba(z,K(y,x)). Man har åpenbart at μ(K(y,x)) Inkl μ(x). Fra dette, (i) og definisjonen av operasjonen Max følger (2) Max(R;e, μ(K(y,x))) = μ(K(y,x)). Anta nå for vilkårlig z at zêU og Ba(z,K(y,x)). Da følger ved hjelp av En3 at ø≠Max(R;e,μ(K(x,y)) Inkl μ(z). Men fra dette og (2) har man selvfølgelig μ(K(y,x)) Inkl μ(z). Dette viser den ene halvdelen av (ii). Anta på den annen side at zêU og at μ(K(y,x)) Inkl μ(z). Da har man ved hjelp av (2) at (3) Max(R;e, μ(K(x,y)) Inkl μ(z). Vi må imidlertid vise (4) Max(R;e, μ(K(x,y))≠ø. Dette følger imidlertid fra (1). Fra (3) og (4) følger så ved hjelp av En3 at Ba(z,K(y,x)). Dette viser at den andre halvdelen av (ii) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§11 Refleksjoner over indre koherens, harmoni og enkelhet.

Er α en mengde med mulige verdener er Max(R;e, α) de R;e-maksimale verdenene i denne mengden α. Som man husker fra fra vår omtale av teorien B;2* er R;e den relasjon som består mellom to verdener w og w' hvis og bare hvis verdenen w har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w. Er derfor α en mengde av mulige verdener vil Max(R;e,α), hvis den er ikke-tom, være mengden av de verdenene i α som har maksimal grad av indre koherens, harmoni og enkelhet. Vi skal kalle Max(R;e,α) for *de maksimalt koherente verdenene i α* .

Hvis man holder seg til denne terminologien kan grunnsetningen En3 formuleres slik:

Enkelhetsprinsipp. Er x og y utsagn bør utsagnet x aksepteres relativt til utsagnet y hvis og bare hvis x og y oppfyller de følgende krav:

(a) Det finnes en ikke-tom mengde av maksimalt koherente verdener i sannhetsmengden til utsagnet y

(b) Mengden av de maksimalt koherente verdenene i sannhetsmengden til y er inkludert i sannhetsmengden til x

© Morten Harboe Rognes 2013

Det skulle være helt klart at dette prinsipp, om det er riktig, gir en et svar på det første hovedproblemet vi nevnte i innledningen til dette arbeid. Det gir oss imidlertid bare et generelt svar, en generell karakteristikk av akseptabilitetsrelasjonen Ba. Man kan derfor naturligvis stille en rekke spørsmål i forbindelse med det. Det er særlig to problemer som det er nærliggende å ta opp til drøftelse.

For det første kan spørre om det er mulig å definere enkelhetsrelasjonen R;e på en slik måte at prinsippet får et mer bestemt innhold og slik at det blir lettere å anvende.

For det andre kan man spørre om det er mulig å benytte prinsippet til å besvare konkrete spørsmål om hva man bør akseptere relativt til forskjellige utsagnsmengder. Med andre ord kan man spørre om prinsippet har noen praktiske anvendelsesmuligheter. Gir det en overhodet noen holdepunkter angående hva man bør akseptere?

Begge spørsmål kan med visse forbehold besvares bekreftende.

La oss først se på det første spørsmålet om det er mulig å definere enkelhetsrelasjonen R;e. Innenfor rammen av B;2*, hvor både akseptansepredikatet og "En(x,y)" er primitive predikater kan man definere relasjonen R;e på den måten vi gjorde det i §7. I B;2* kan man vise, som vi allerede har gjort, at det finnes en og bare en preferanserelasjon over I som oppfyller enkelhetsprinsippet og at denne er identisk med R;e. Definerer man relasjonene R;1 og R;2 på den måten vi gjorde i §7 er det intet som hindrer at man kan definere R;e ved å sette R;e=R;1 eller ved å sette R;e = R;2. Begge disse definisjonene kan faktisk utledes i B;2*. Hvis man derfor aksepterer at det akseptanseteoretiske predikatet "Ba(x,y)" gir mening og aksepterer man grunnsetningene B1 - B12 som alle kan utledes i B;2* må man naturligvis akseptere at R;e=R;1 og at R;e= R;2 og at begge disse definisjonene er korrekte. Man kunne kanskje innvende at dette dypest sett er en sirkulær prosedyre. Men dette er ikke tilfelle. Aksepterer man aksiomene i B;2*, og aksepterer man at de primitive predikatene i B;2* er meningsfulle, kan man utlede disse to definisjonene og det er intet sirkulært ved denne prosedyren. Det vi tidligere har vist viser også at dersom akseptansepredikatet aksepteres som meningsfullt må naturligvis også definisjonene vi ga i §7 av R;1 og R;2 ha et bestemt innhold.

Er det mulig å definere predikatet "En(x,y)" på noen annen måte enn det vi har gjort tidligere og på basis av en slik definisjon utlede grunnsetningene En0 - En2? Det er vanskelig å se hvordan dette skulle kunne gjøres. Hvis man påstår at dette er mulig er det vanskelig å se hva som er grunnlaget for påstanden. Heller ikke er det lett å se hva poenget med å påstå noe slikt skulle være. Det sier seg selv at ikke ethvert begrep kan defineres. Det må alltid defineres ved hjelp av visse andre. Ettersom definisjonskjeder ikke kan fortsettes i det uendelig må man nødvendigvis ta utgangspunkt i visse begreper som ikke defineres. I den utstrekning disse grunnebegrepene er tilstrekkelig klare er det intet som forhindrer at man kan ta sitt utgangspunkt i dem. Når det gjelder predikatet "En(x,y)", med andre ord predikatet "x er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen y", er et vankelig å se hvorfor dette skulle regnes som spesielt uklart.

Tenker man seg for eksempel en verden der de grunnleggende elementer er små udelelige partikler med en viss masse som beveger seg fullstendig i overenstemmelse med Newtons lover er det naturlig å tenke seg at denne er enklere og har større grad av indre koherens enn en mulig verden der disse partiklene i visse tidsintervall beveger seg i overenstemmelse med disse lovene, mens de i andre tidsintervaller beveger seg i

© Morten Harboe Rognes 2013

overensstemmelse med helt andre og langt mer kompliserte lover. Eller tenker man seg en verden der gjenstandene som eksisterer pluselig dukker opp og så forsvinner fra steder i rommet på en måte som det er svært vanskelig se noe regelmessig mønster i vil dette åpenbart være en verden med langt mindre indre koherens og enkelhet enn en verden hvor gjenstandene har en relativt stabil og kontinuerlig eksistens og hvor de skifter egenskaper etter lover som i det store og hele lar seg uttrykke på en forståelig måte. I lys av disse og talløse andre eksempler synes det naturlig å konkludere med at predikatet "En(x,y)" er et fullstendig klart og meningsfullt predikat.

La oss nå se på det andre spørsmålet som var om enkelhetsprinsippet har noen praktiske anvendelser og om det gir en noen holdepunkter for hva man bør akseptere relativt til forskjellige utsagn. Svaret er bekreftende.

Det første man kan bemerke er at man fra dette prinsippet umiddelbart kan utlede at dersom noe bør aksepteres relativt til et utsagn x så bør utsagnet x selv og det nødvendige utsagn aksepteres relativt til x. At det nødvendige utsagn bør aksepteres relativt til utsagnet x innebærer at alle logiske og matematiske sannheter bør aksepteres relativt til dette utsagn. Dette innebærer i sin tur at alle sannheter innenfor de enkelte grener av matematikken, for eksempel innenfor mengdelæren, aritmetikken, geometrien, analysen osv. bør aksepteres relativt til ethvert utsagn som noe overhodet bør aksepteres reltivt til. Siden x selv bør aksepteres relativt til x, om overhodet noe bør aksepteres relativt til x, følger det også at alle utsagn som kan utledes fra x selv ved hjelp av logiske og matematiske prinsipper bør aksepteres relativt til x. Om for eksempel alle setningene i akseptanseteorien vi har utarbeidet, med andre ord B;1, er nødvendige sannheter følger det naturligvis at også alle disse sannhetene bør aksepteres relativt ethvert utsagn x som noe bør aksepteres til.

Det kan være hensiktsmessig å stanse opp her. Vi har ovenfor forutsatt at x er et utsagn som noe bør aksepteres relativt til, med andre at (Ez)Ba(z,x). Et slikt utsagn skal vi kalle for et utsagn som representerer en *akseptansebasis*. Man ser ved hjelp av enkelhetsprinsippet at dersom utsagn x representerer en akseptansebasis har man at $Max(R;e,\mu(x)) \neq ø$. Det er heller ikke vanskelig å innse ved hjelp av dette prinsippet at det omvendte holder, nemlig at dersom x er et utsagn der $Max(R;e,\mu(x)) \neq ø$ så har man at (Ez)Ba(z,x), med andre ord at x representerer en akseptansebasis. Heller ikke er det vanskelig å utlede ved hjelp av enkelhetsprinsippet at Ba(t,x) er ekvivalent med at x representerer en akseptansebasis. Den følgende sats representerer en sammenfatning av disse iaktagelsene:

Teorem 11.1: Anta x er et utsagn. Da er følgende påstander ekvivalente:
(i) (Ez)Ba(z,x) (ii) $Max(R;e,\mu(x)) \neq ø$ og (iii) Ba(t,x)

Et viktig spørsmål som oppstår i denne forbindelse er om alle ikke-kontradiktoriske utsagn representerer en akseptansebasis[11]. Og om dette ikke holder om det er mulig i forbindelse med et utsagn x å angi noen ikke-trivielle kriterier som er nødvendige og tilstrekkelige for at x skal representere en akseptansebasis. Når det gjelder dette siste kan det bemerkes at såvel B11 som B12 angir to tilstrekkelige betingelser for at et utsagn representerer en akseptansebasis.

11 Man ser lett at det omvendte holder. For representerer utsagnet x en akseptansebasis har man ifølge Teorem 11.1 at $Max(R;e, \mu(x)) \neq ø$. Men $Max(R;e,\mu(x))$ Inkl $\mu(x)$. Det følger at $\mu(x) \neq ø$ og at utsagnet x har en ikke-tom sannhetsmengde. Da må det åpenbart være et ikke-kontradiktorisk utsagn.

© Morten Harboe Rognes 2013

Imidlertid er ingen av disse betingelsene spesielt informative. B11 sier bare at ethvert utsagn med en endelig sannhetsmengde representerer en akseptansebasis, men dette sier en ikke stort siden ethvert normalt utsagn må ha en sannhetsmengde som er alt annet enn endelig. B12 impliserer at dersom sannhetsmengden til et utsagn innholder maksimale elementer representerer det en akseptansebasis. Dette er implisert av enkelhetsprinsippet og sier en heller ikke mye.

Når det gjelder påstanden at alle ikke-kontadiktoriske, konsistente utsagn representerer en akseptansebasis kan denne påstanden formaliseres slik:

B16 $(Ax)(x\hat{e}U \,\&\, \mu(x)\neq\emptyset \rightarrow (Ez)Ba(z,x))$

I lys av teoremet ovenfor er denne påstanden ekvivalent med den påstand at sannhetsmengden til ethvert konsistent utsagn inneholder R;e-maksimale elementer. Med andre ord er B16 ekvivalent med $(Ax)(x\hat{e}U \,\&\, \mu(x)\neq\emptyset \rightarrow Max(R;e,\mu(x)\neq\emptyset)$. Vi nevnte tidligere at R;e, siden den er en preferanserelasjon over I, ordner de enkelte preferansenivåene den induserer lineært. Antar man nå at B16 holder kan man vise at de preferansenivåene som er bestemt av R;e ikke bare kan ordnes lineært, de kan også velordnes. Man kan også vise det omvendte. Kan de enkelte R;e-preferansenivåene velordnes holder også B16. Dette er innholdet i det følgende teorem:

Teorem 11.2: De følgende to påstander er ekvivalente:

(i) $(Ax)(x\hat{e}U \,\&\, \mu(x)\neq\emptyset \rightarrow Max(R;e, \mu(x))\neq\emptyset)$

(ii) $(E\alpha)(\alpha\hat{e}On \,\&\, (Ef)(Func(f) \,\&\, f: \alpha \text{-}(1\text{-}1)\rightarrow I \,\&$
$(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}\alpha \rightarrow (x<y \leftrightarrow f(x)\ R;e^*\ f(y))) \,\&$
$UN/x\hat{e}\alpha/(Mg(w: w\hat{e}I \,\&\, w\ L(R;e)\ f(x)))= I))$

I forbindelse med B16 og Teorem 11.2 kan man bemerke to ting.

For det første impliserer B16 at det nødvendige utsagn $\mu;\text{-}1(I)$ representerer en akseptansebasis. Dette innebærer at mengden av alle mulige verdener inneholder visse R;e-maksimale elementer. Dette vil være de verdenene som har størst mulig grad av indre koherens, harmoni og enkelthet i forhold til alle logisk mulige verdener. Sagt på en annen måte impliserer B16 at det finnes visse enkleste verdener. Alle andre verdener er enten like enkle som disse eller mindre enkle, det vil si mer kompliserte. Dette i sin tur innebærer, om det finnes flere ikke-tomme enkelhetsnivåer og mengden av mulige verdener er uendendelig at det finnes kontingente utsagn, og ikke bare nødvendige utsagn, som bør aksepteres relativt til det nødvendige utsagn.

For det annet er B16 fullt ut forenelig med aksiomene B1 - B12, med andre er påstanden logisk sett forenelig med teorien B;1, og derfor selvfølgelig også med teoriene B;1*, B;2* og B;2 siden alle disse teoriene er ekvivalente. Hvis man derfor utvider teorien B;1 med B16 som en ny grunnsetning får man som resulatet en meget avrundet akseptanseteori. Man fristes nesten til å si at teorien har en slags "pyramidal" struktur siden enhver verden kan tilordnes en "kompleksitetsgrad" representert ved et ordinaltall.

Etter dette mellomspillet om hvilke utsagn som representerer en akseptansebasis vender vi tilbake til spørsmålet om hvilke holdepunkter enkelhetsprinsippet gir angående hvilke påstander man bør akseptere og hvilke man ikke bør akseptere relativt til et eller annet gitt

© Morten Harboe Rognes 2013

utsagn x. I det følgende finner vi det hensiktsmessig å kalle et utsagn *x for et verfisert observasjonsutsagn ved tidspunktet t* hvis og bare hvis x er et utsagn som beskriver et saksforhold som en eller annen person har konstatert at foreligger ved sanseiaktagelse ved et eller annet tidspunkt som enten kommer før tidspunktet t eller er identisk med tidspunktet t. Alle utsagn som beskriver saksforhold som en eller annen person i 1814 konstaterte ved sanseiaktagelse at var tilfelle representerer derfor i denne betydningen verifiserte observasjonsutsagn ved det nåværende tidspunkt. Konjunksjonen av alle verfiserte observasjonsutsagn ved tidspunktet t skal vi betegne med "e(t)". Dette utsagnet skal vi også kalle "den totale empiriske evidens som foreligger ved tidspunktet t". Tenker man seg at t0 er det nuværende tidspunkt vil e(t0) være den totale empiriske evidens som foreligger ved det nuværende tidspunkt. Det skulle være klart fra definisjonen av e(t) at dette er et konsistent utsagn for alle tidspunkter t så sant det ved noe t' =< t finnes en eller annen som har observert noe ved t'. Antar man at t er valgt ut slik at dette krav er oppfylt og at B16 holder følger det da at e(t) representerer en akseptansebasis.

I det følgende vil vi anta at den totale empiriske evidens som foreligger ved det nuværende tidspunkt, med andre ord e(t0), representerer en akseptansebasis. Hva bør så aksepteres relativt til denne totale empiriske evidens i lys av enkelhetsprinsippet? For det første innser man, på samme måte som tidligere, at alle rent logiske og matematiske prinsipper bør aksepteres relativt til e(t0). For det andre følger det ved hjelp av enkelhetsprinsippet at alle utsagn som er logisk implisert av e(t0) bør aksepteres relativt til denne mengden av evidens. Dette innebærer for eksempel at man bør akseptere relativt til e(t0) negasjonen av ethvert utsagn som er logisk sett uforenelig med e(t0). Som man ser i lys av dette og det vi tidligere har nevnt gir enkelhetsprinsippet en god del informasjon om hva man bør og hva man ikke bør akseptere.

Hva nå med utsagn som hverken er logiske eller matematiske prinipper eller som er implisert av e(t0) ved hjelp av slike prinsipper? Gir enkelhetsprinsippet en noen holdepunkter for hva man bør akseptere av utsagn som er uavhengige av e(t0)? Dette synes å være tilfelle. La for eksempel N være det utsagn som sier at Newtons lover er tilnærmet riktige dersom de gjenstander man undersøker ikke beveger seg med en hastighet som ligger for nært opp til lysets hastighet og gjenstandene ikke er for små. Det skulle være klart at N ikke kan utledes fra e(t0). e(t0) beskriver bare det man har observert inntil t0. N sier noe om hvordan gjenstander vil bevege seg uansett hvor langt inn i fremtiden man tenker seg at man befinner seg. Man kan derfor tenke seg verdener der e(t0) er sann, men N er usann. På den annen side synes også N å være forenelig med e(t0). Man har neppe gjort noen observasjoner som viser at Newtons lover ikke er *tilnærmet* riktige. Bør man så akseptere N relativt til e(t0)? Dette bør man ikke gjøre i følge enkelhetsprinsippet om man kan vise at det blandt de enkleste verdenene der e(t0) er sann finnes noen der N er usann. Det er imidlertid ytterst vanskelig å se for seg hvordan noen slike verdener skulle være. Enhver verden der e(t0) er sann og der N er usann synes med nødvendighet å måtte regnes som mer komplisert enn en der begge disse to utsagnene er sanne. Man er derfor tvunget til å akseptere at de enkleste verdenene i sannhetsmengden til e(t0) er blandt dem i sannhetsmengden til N, kort sagt at N bør aksepteres relativt til e(t0).

Lignende overveielser kan gjøres om man i stedet for N betrakter for eksempel Maxwells teori om elektromagnetisme, Einsteins relativitetsteori, gasslovene eller optikkens lover. Det ville være nærmest uforståelig om noen hevdet at i noen av de enkleste verdenene som er kompatible med den totale empiriske evidens vi nå er i besittelse av er det slik at en

© Morten Harboe Rognes 2013

eller annen av disse teoriene er uholdbar. Hvis dette er umulig følger det ved hjelp av enkelhetsprinsippet at alle disse teoriene bør aksepteres relativt den totale empiriske evidens som foreligger nå. Ikke bare følger det at disse teoriene er akseptable, men også alle mer spesielle lover som kan utledes fra disse teoriene ved hjelp av ren logikk og matematikk bør aksepteres. I lys av disse overveielsene kan man si at relativt til den totale empiriske evidens som foreligger ved det nåværende tidspunkt bør man akseptere hovedtrekkene i det fysiske virkelighetsbilde. Fra dette kan man imidlertid ikke ad logisk vei slutte at de fysiske teoriene vi har nevnt ovenfor er akseptable relativt til den totale empiriske evidens som vil være akkumulert om for eksempel hundre eller to hundre år.

Vi har nå sett at de to spørsmålene vi stilte i forbindelse med enkelhetsprinsippet i begynnelsen av dette avsnittet, med god grunn kan besvares bekreftende.

I resten av denne paragrafen skal vi ta vårt utgangspunkt i et eksempel og oppsummere våre resultater i form av formelle teoremer. Poenget med våre overveielser er å belyse i hvilken grad enkelhetsprinsippet kan brukes til å kaste lys over hva man bør og hva man ikke bør akseptere relativt til et gitt utsagn.

La u;1 være utsagnet at alle ravner er svarte. La u;2 være det mer kompliserte utsagn som som sier at alle ravner som er født før år 2150 er svarte, mens alle ravner som er født i år 2150 eller etter dette året er hvite om de er født i Tyskland, svarte om de er født i Polen og brune om de er født utenfor disse to landene. Vi skal betrakte disse to utsagnene. La videre e(t0) være den totale empiriske evidens som foreligger ved det nåværende tidspunkt. I det følgende vil vi betegne dette utsagnet med "e".

I forbindelse med disse utsagnene virker det ikke helt urimelig å anta

(1) $\mathrm{Max}(R;e, \mu(u;i)) \neq \emptyset$ om $i=1,2$

Dette innebærer at det finnes visse R;e-maksimale verdener, visse verdener med maksimal indre koherens, harmoni og enkelhet i såvel sannhetsmengden til u;1 som i sannhetsmengden til u;2. Ved første øyekast kan det også virke rimelig å hevde at de enkleste verdenene i μ(u;1) er enklere enn de enkleste verdenene i μ(u;2). Det følgende synes følgelig å være en plausibel påstand:

(2) $(Aw)(Aw')(w \hat{e} \mathrm{Max}(R;e,\mu(u;1)) \,\&\, w' \hat{e} \mathrm{Max}(R;e,\mu(u;1)) \rightarrow wR;e*w')$

Videre virker det rimelig å tro at de to utsagnene u;1 og u;2 begge er forenelige med e. Det virker for eksempel ikke selvmotsigende å hevde at e er sann og samtidig at u;2 er sann. Det vi så langt vet på grunnlag av sanseiaktagelse synes ikke logisk sett å utelukke u;2. Det virker også høyest rimelig å si at e ikke impliserer u;1. Med andre ord har vi at

(3) $e \hat{e} U \,\&\, \mu(u;i) \Omega e \neq \emptyset \quad (i=1,2)$
(4) $\neg(\mu(e)\ \mathrm{Inkl}\ \mu(u;1))$

Vil mengden av de enkleste verdenene hvor u;1 er sann også inneholde en verden hvor e er sann. Dette virker ikke helt urimelig. Det synes derfor som om man kan ha gode grunner for å hevde

© Morten Harboe Rognes 2013

(5) $\mu(e)\Omega Max(R;e,\mu(u1)) \neq \emptyset$

Hvis man aksepterer (1) vil det vel heller ikke være urimelig å hevde at også sannhetsmengden til e inneholder visse R;e-maksimale verdener, med andre ord at e utgjør en akseptansebasis:

(6) $Max(R;e, \mu(e)) \neq \emptyset$

Hvis man nå antar at (1) - (6) holder må man, om man aksepterer teorien B;1, også akseptere:

(7) Ba(Neg(u;2), e)

Man har nemlig at kondisjonalen som har konjunksjonen av (1) - (6) som antesedent og (7) som konsekvent er et teorem i B;1[12].

Dette viser hvordan B;1 kan brukes ved konstruksjon av argumenter til fordel for en konklusjon av typen Ba(u,e) hvor u er et kontingent utsagn og hvor hverken u eller negasonen av u er logisk sett implisert av e.

La oss formulere eksplisitt det teorem vi har nevnt og gi et bevis for det:

Teorem 11.3: Anta u;1, u;2 og e er utsagn og anta det følgende holder:

(i) $Max(R;e, \mu(u;i)) \neq \emptyset$ om i=1,2

(ii) $(Aw)(Aw')(w \hat{e} Max(R;e,\mu(u;1)) \& w' \hat{e} Max(R;e,\mu(u;2)) \rightarrow wR;e^*w')$

(iii) $\mu(u;i)\Omega e \neq \emptyset$ (i=1,2)

(iv) $\neg(\mu(e)$ Inkl $\mu(u;1))$

(v) $\mu(e)\Omega Max(R;e,\mu(u1)) \neq \emptyset$

(vi) $Max(R;e, \mu(e)) \neq \emptyset$

Da gjelder: Ba(Neg(u;2), e)

Bevis: Fra forutsetning (i) følger eksistensen av w1,w2êI der

(1) $w1 \hat{e} Max(R;e,\mu(u;1)) \& w2 \hat{e} Max(R;e, \mu(u;2))$

Fra dette og den andre forutsetningen, (ii), følger derfor: (2) w1R;e*w2

I lys av forutsetning (vi) vil det være tilstrekkelig å vise at det følgende holder:

(3) $Max(R;e, \mu(e))$ Inkl $\mu(Neg(u;2)) = I - \mu(u;2)$

siden konklusjonen i teoremet følger fra (3) og forutsetning (vi) ved hjelp av enkelhetsprinsippet. Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes w0êI slik at

(4) $w0 \hat{e} Max(R;e,\mu(e)) \& w0 \hat{e} \mu(u;2)$

Fra forutsetning (v) følger eksistensen av w3 der vi har (5) $w3 \hat{e} \mu(e) \& w3 \hat{e} Max(R;e,\mu(u;1))$

Fra (4), (5) og definisjonen av operatoren Max kan man slutte (6) w0 R;e w3

Den første konjunkten i (1) og den siste konjunkten i (5) impliserer: (7) w1 L(R;e) w3

Fra (2), (6) og (7) kan man slutte, siden R;e er en preferanserelasjon at (8) w0 R;e* w2.

Imidlertid følger fra den andre konjunktenn i (4) og (1) at w2R;ew0. Men fra dette og (8) følger w0 R;e* w0 som er umulig. Det følger at det ikke kan finnes noen w0 som oppfyller kravet (4). Fra dette følger at (3) holder, og derfor i lys av forutsetning (vi) at Ba(Neg(u;2),e). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

12 Og derfor selvfølgelig også et teorem i de ekvivalente teoriene B;1*, B;2 og B;2*.

© Morten Harboe Rognes 2013

Kommentar: Man ser at forutsetningene (iii) og (iv) ikke har blitt brukt i dette beviset. Disse forutsetningene kan derfor sløyfes i Teorem 11.3.

I forbindelse med satsen ovenfor bør det bemerkes at konjunksjonen av de to første forutsetningene er ekvivalente med:

(+) (Ew)(Ew')(wR;e*w' & wêMax(R;e,μ(u;1)) & w'êMax(R;e,μ(u;2)))

Det kan også nevnes at den femte forutsetningen er ekvivalent med

(++) ¬Ba(Neg(e), u;1),

dersom man forutsetter Max(R;e,μ(u;1))≠ø . La oss vise dette. Anta (++) holder. Da har man ved hjelp av enkelhetsprinsippet at

¬ (Max(R;e,μ(u;1)) Inkl μ(e)) siden det forutsettes at Max(R;e,μ(u;1))≠ø Fra dette følger: ¬(Aw)(wê Max(R;e,μ(u;1)) → wê(μ(Neg(e)))) og derfor

¬(Aw)(wê Max(R;e,μ(u;1)) → wê(I - μ(e))). Men dette er ekvivalent med at (Ew)(wê Max(R;e,μ(u;1)) &wêμ(e)) som igjen er ekvivalent med μ(e)Ω Max(R;e,μ(u;1)) ≠ ø. Man ser også lett at man kan bevise at det omvendte, nemlig at μ(e)Ω Max(R;e,μ(u;1)) ≠ ø impliserer (++).

I lys av disse overveielsene kan derfor Teorem 11.3, minus forutsetningene (iii) og (iv) formuleres slik

Teorem 11.4: Anta u;1,u;2 og e er utsagn og anta dessuten
(i) ¬Ba(Neg(e), u;1)
(ii) (Ew)(Ew')(wR;e*w' & wêMax(R;e,μ(u;1)) & w'êMax(R;e,μ(u;2)))
(iii) Max(R;e, e) ≠ø
Da gjelder: Ba(Neg(u;2), e)

Vi skal bevise ytterligere noen satser som er beslektet med teoremet ovenfor. Den første er den følgende:

Teorem 11.5: Anta e, u1 og u2 er utsagn. Anta dessuten:
(i) w1êMax(R;e, μ(eΩu1)) & w2êMax(R;e, eΩ μ(u2))
(ii) w1R;e* w2
(iii) Max(R;e, μ(e))≠ø
Da gjelder: Ba(Neg(u2), e)

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Anta for reduktio ad absurdum at (1) ¬Ba(Neg(u2),e). Ved hjelp av enkelhetssprinisppet ser man at (1) impliserer: ¬(ø≠Max(R;e, μ(e)) & Max(R;e,μ(e)) Inkl I - μ(u2)). Fra dette og forutsetning (iii) kan man slutte ¬(Max(R;e,μ(e)) Inkl I-μ(u)). Fra dette følger så eksistensen av w3êI der

(2) w3êMax(R;e, μ(e)) & w3êμ(u2). Fra den tredje forutsetningen følger eksistensen av noe w0êI slik at (3) w0êMax(R;e, μ(e)). Fra (2), (3), definisjonen av operasjonen Max og definisjonen av L(R;e) kan man slutte (4) w0 L(R;e) w3. La w' være et vilkårlig element i μ(eΩu2). Da har man w'êμ(e) & w'êμ(u2). Siden w'êμ(e) har man ved hjelp av (2) at w3 R;e w'. Siden w3êμ(eΩu2) ifølge (2) og w' var vilkårlig element i μ(eΩu2) følger det at w3êMax(R;e, μ(eΩu2)). Fra dette og den første forutsetningen kan man slutte (5) w3 L(R;e) w2. Anta w1R;e* w0. Fra forutsetning (i) følger w1êμ(e) og derfor kan man slutte at ¬ (w0êMax(R;e,μ(e)). Dette strider mot (3). Man har derfor w1 L(R;e) w0 eller w0 R;e*w1. I det første tilfelle følger ved hjelp av (4) og (5) at w1 L(R;e) w2. Men dette

© Morten Harboe Rognes 2013

strider mot forutsetning (ii). I det andre tilfelle har man ved hjelp av (4) og (5) at w2 R;e* w1. Men dette strider også åpenbart mot forutsetning (ii). I begge tilfelle kan man utlede en motsigelse. Det følger at (1) ikke holder og derfor at man har Ba(Neg(u2),e). **QED**.

I forbindelse med det forrige teoremet er det også naturlig å se på følgende teorem:

Teorem 11.6: Anta α,β,t og e er utsagn. Anta dessuten:
(i) w1êMax(R;e,μ(β Ω tΩe))
(ii) w2ê μ(αΩtΩe)
(iii) w2 R;e* w1
(iv) Ba(t,e)
Da gjelder Ba(Neg(β),e)

Bevis: Anta (1) w1êMax(R;e,μ(β Ω tΩe)) & w2ê μ(αΩtΩe) & w2 R;e* w1 & Ba(t,e) Anta for reduktio ad absurdum at (2) ¬Ba(Neg(β),e). Fra (2) følger:
(2.1) ¬(ø≠Max(R;e,μ(e)) & Max(R;e,μ(e)) Inkl μ(Neg(β)))
Fra den fjerde konjunkten i (1) følger følger (3) Max(R;e,μ(e)) ≠ø. Fra dette og (2.1) kan man slutte ¬(Max(R;e,μ(e)) Inkl μ(Neg(β))). Herav følger eksistensen av noe w0êI slik at (4) w0êMax(R;e,μ(e)) & w0êμ(β). Fra den fjerde konjunkten følger:
(5) Max(R;e, μ(e)) Inkl μ(t). Fra (4) og (5) kan man så slutte w0êμ(βΩtΩe). Fra dette og den første konjunkten i (1) følger (6) w1R;e w0. Nå har man fra den andre konjunkten i (1) at w2êμ(αΩtΩe) og derfor siden μ(αΩtΩe) Inkl μ(e) at w2êμ(e). Fra dette, (4) og definisjonen av operasjonen Max følger w0 R;e w2. Herav kan man ved hjelp av den tredje konjunkten i (1) og (6) slutte at w0 R;e w2 R;e* w1 R;e w0. Herav w0 R;e* w0 som åpenbart er absurd. Det følger at (2) er usann og derfor at vi har Ba(Neg(β),e). **QED**.

De to neste teoremene angir samlet en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at man skal ha Ba(x,y) for to utsagn x og y. Dette gir en derfor en ny karakteristikk av akseptanserelasjonen. Enkelhetsprinsippet, En3, gir oss også en slik nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at man bør akseptere et utsagn relativt til et annet.

Teorem 11.7: Anta e, u0 er utsagn. Anta dessuten at
(i) Max(R;e,μ(e)) ≠ø
(ii) Max(R;e, μ(e)Ωμ(u0)) ≠ø
(iii) (Au)(uêU & Cons({u,e}) & ¬Cons({u,u0} →
(Aw)(Aw')(wêMax(R;e, μ(e)Ωμ(u)) & w'êMax(R;e,μ(e)Ωμ(u0)
→ w' R;e*w))
Da gjelder: Ba(u0,e)

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder og anta for reduktio ad absurdum at (1) ¬Ba(u0,e). Da følger ved hjelp av enkelhetsprinsippet at
(2) ¬(Max(R;e,μ(e))≠ø & Max(R;e,μ(e)) Inkl μ(u0)). Fra dette og forutsetning (i) kan man slutte at (3) ¬(Max(R;e,μ(e)) Inkl μ(u0)). Det følger herav at det finnes w0 slik at (4) w0êI & w0êMax(R;e,μ(e)) & ¬(w0êμ(u0)). Sett nå per definisjon u1= μ;-1({w0}). Da har man: (5) u1êU. Fra (4) og (5) fremgår det at w0ê{w0} =μ(u1) og at ¬(w0êμ(u0)). Man

© Morten Harboe Rognes 2013

har derfor at $\mu(u0)\Omega\mu(u1)=\emptyset$. Det følger herav at (6) $\neg Cons(\{u1,u0\})$. Siden $w0 \hat{e} Max(R;e,\mu(e))$ følger det at $w0 \hat{e} \mu(e)$. Fra dette og definisjonen av u1 følger (7) $Cons(\{u1,e\})$. Fra (5), (6), (7) og forutsetning (iii) følger

$$(Aw)(Aw')(w \hat{e} Max(R;e, \mu(e)\Omega\mu(u1)) \& w' \hat{e} Max(R;e,\mu(e)\Omega\mu(u0) \rightarrow w' \, R;e^*w)$$

Fra dette har vi siden $Max(R;e,\mu(e)\Omega\mu(u1)) = Max(R;e,\mu(u1)) = Max(R;e,\{w0\})=\{w0\}$ at

(8) $(Aw')(w' \hat{e} Max(R;e,\mu(e)\Omega\mu(u0) \rightarrow w' \, R;e^*w0)$

Fra forutsetning (ii) følger at det finnes w1 slik at (9) $w1 \hat{e} Max(R;e,\mu(e)\Omega\mu(u0))$
Fra dette og (8) følger $w1 \, R;e^* \, w0$. Fra (9) følger også $w1 \hat{e} \mu(e)\Omega\mu(u0)$ Inkl $\mu(e)$. Fra dette og (4) kan man slutte $w0R;ew1$. Men da $w0R;e^*w0$ som åpenbart er absurd. **QED**.

Teorem 11.8: Ba(u0,e) er ekvivalent med konjunksjonen av de følgende betingelser:

(i) $u0,e \hat{e} U$

(ii) $Max(R;e,\mu(e)) \neq \emptyset$

(iii) $Max(R;e, \mu(e)\Omega\mu(u0)) \neq \emptyset$

(iv) $(Au)(u \hat{e} U \& Cons(\{u,e\}) \& \neg Cons(\{u,u0\} \rightarrow (Aw)(Aw')(w \hat{e} Max(R;e, \mu(e)\Omega\mu(u)) \& w' \hat{e} Max(R;e,\mu(e)\Omega\mu(u0) \rightarrow w' \, R;e^*w))$

Bevis: At konjunksjonen av (i) - (iv) impliserer Ba(u0,e) fremgår av Teorem 11.7. La oss bevise implikasjonen den andre veien. Anta (1) Ba(u0,e). Da følger ved hjelp av enkelhetsprinsippet: (2) $u0,e \hat{e} U \; \& \; \emptyset \neq Max(R;e,\mu(e))$ Inkl $\mu(u0)$. Fra dette følger at (i) og (ii) holder. Fra (2) følger at det finnes w0 slik at $w0 \hat{e} Ma(R;e,\mu(e))$. Da har vi ved hjelp av (2) at (3) $w0 \hat{e} \mu(e)\Omega\mu(u0)$. Anta nå at w er et vilkårlig element i I der $w \hat{e} \mu(e)\Omega\mu(u0)$. Da har vi enten $w \hat{e} Max(R;e,\mu(e))$ eller $\neg(w \hat{e} Max(R;e,\mu(e)))$. I det første tilfellet har vi, siden $w0 \hat{e} Max(R;e,\mu(e))$, at $wL(R;e) \, w0$. Da har vi $w0 \, R;e \, w$. I det andre tilfelle må vi ha at $w0 \, R;e^* \, w$. Siden w var vilkårlig har vi vist $(Aw)(w \hat{e} \mu(e)\Omega\mu(u0) \rightarrow w0R;e \, w)$. Sammen med (3) impliserer dette at $w0 \hat{e} Max(R;e, \mu(e)\Omega\mu(u0))$ og derfor at (iii) holder.

Det gjenstår bare å vise at (iv) holder. Anta derfor for vilkårlige u,w,w' at

(4.1) $u \hat{e} U \& Cons(\{u,e\}) \& \neg Cons(\{u,u0\})$

(4.2) $w \hat{e} Max(R;e, \mu(e)\Omega\mu(u))$

(4.3) $w' \hat{e} Max(R;e, \mu(e)\Omega\mu(u0))$

Vi ønsker å vise at $w'R;e^* \, w$. Fra (2) kan man slutte at det finnes $w1 \hat{e} Max(R;e,\mu(e))$. Det følger videre fra (2) at $w1 \hat{e} \mu(u0)$. Det følger at (5) $w1 \hat{e} \mu(e)\Omega\mu(u0)$. Anta for vilkårlig r at $r \hat{e} \mu(e)\Omega\mu(u0)$. Da har vi $r \hat{e} \mu(e)$ og følgelig, siden $w1 \hat{e} Max(R;e,\mu(e))$, at $w1R;e \, r$. Siden r var vilkårlig har vi derfor $(Ar)(r \hat{e} \mu(e)\Omega\mu(u0) \rightarrow w1 \, R;e \, r)$. Sammen med (5) impliserer dette at (6) $w1 \hat{e} Max(R;e, \mu(e)\Omega\mu(u0))$. Fra dette og (4.3) har man (7) $w1 \, L(R;e) \, w'$. Fra (4.2) kan man slutte (8) $w \hat{e} \mu(e)\Omega\mu(u)$. Vi har derfor (9) $w \hat{e} \mu(e)$. Fra den siste konjunkten i (4.1) følger: (10) $\mu(u0)\Omega\mu(u)=\emptyset$. Fra (2), (8) og (10) følger at $\neg(w \hat{e} Max(R;e,\mu(e)))$. Siden $w \hat{e} \mu(e)$ og $w1 \hat{e} Max(R;e,\mu(e))$ kan vi da slutte at $w1 \, R;e^* \, w$. Fra dette og (7) følger så det vi ønsker, nemlig $w'R;e^* \, w$. **QED**.

§12 Analyse av et spesielt induksjonsprinsipp

I dette avsnittet er hensikten å analysere et bestemt induksjonsprinsipp. Men før vi kan formulere dette prinsippet presist er det nødvendig å minne om definisjonen av enkelte

© Morten Harboe Rognes 2013

begreper i egenskapsteorien, dessuten finner vi det også nødvendig å innføre noen nye begreper.

I det følgende betegner D mengden av alle mulige individer. Siden alle de predikatene som inngår i språket til egenskapsteorien E;3 også inngår i språket til de akseptanseteoriene vi har undersøkt, med andre ord teoriene B;1, B;1*, B;2 og B;2*, og "MI(x)", "x er et mulig individ" er blandt predikatene i egenskapsteorien, inngår dette predikatet selvfølgelig også i disse akseptanseteoriene. Vi setter per definisjon D = Mg(x: MI(x)). D er derfor mengden av alle mulige individer. Det bør bemerkes at D omfatter alt i det kumulative hierarkiet. D vil derfor ikke selv eksistere på noe nivå i dette hierarkiet.

Er d en mengde som er en delmengde av D, betegner vi mengden av alle de funksjoner som har d som domene og verdiområdet innkludert i mengden av utsagn, U, med "U^d". Vi har altså at

U^d = Mg(f: Func(f) & Dom(f)=d & Rgn(f) Inkl U)

Vi minner om at dersom x,y er utsagn så er C(x,y) kondisjonalutsagnet som har x som antesedent og y som konsekvent, K(x,y) konjunksjonen av utsagnene x og y, D(x,y) disjunksjonen av utsagnene x og y og Neg(x) negasjonen av utsagnet x. Man ser også at dersom XêU^d har man, dersom aêd, at X(a)êU. Er X,YêU^d for en eller annen mengde med mulige individer d er uttrykket "G;d(X,Y)" definert på følgende måte:

G;d(X,Y) = SNu(Mg(C(X(a),Y(a)): aêd)

Man kan kalle G;d(X,Y) for det generelle kondisjonalutsagnet over d med egenskapen X som antesedent og egenskapen Y som konsekvent.

Vi skal i det følgende anta at d er en mengde med mulige individer. Det forutsettes altså at (1) d Inkl D. Vi skal også anta at π er en funksjon som en-entydig avbilder mengden av se naturlige tall på mengden d. Vi antar derfor:

(2) π: N-(1-1,på)→ d

π(0), π(1), π(2), ... vil altså være en uendelig rekke med mulige individer. Det følger også at d er en ikke-tom mengde.

I det følgende skal vi dessuten anta at (3) X;1, X;2ê U^d. Med andre ord antar vi at:

X;i ê Mg(f: Func(f) & Dom(f)=d & Rgn(f) Inkl U) om i=1,2

Dette innebærer at X;i(a)êU for alle aêd og at X;i(π(k))êU for alle kêN.

Vi setter per definisjon

c(k) =C(X;1(π(k)), X;2(π(k))).

Vi forutsetter at

(4) (An)[nêN → μ(SNu/i,0,n+1/(c(π(i))) SInkl μ(SNu/i,0,n/(c(π(i)))]

Endelig skal vi anta at

(5) SN/n,0,∞/(μ(c(π(n)))) ≠ø

Fra dette følger, om kêN, at c(π(k)) er et konsistent utsagn. Videre har vi at SNu/k,0,∞/(c(k)) er konsistent og kontingent utsagn og at de diverse utsagnene utsagnene SNu/k,0,n+1/(c(k)) er kontingente ettersom n gjennomløper tallrekken. Man ser også lett at

SNu/aêd/(c(π;-1(a))) = SNu/k,0,∞/(c(k))

La oss kalle et firetuple <X;1,X;2,π,d> som oppfyller kravene (1) - (5) ovenfor for et *regulært*

© Morten Harboe Rognes 2013

egenskapspar.

La oss minne om hva vi forstår med en induktiv slutning: Dette er et ordnet par <Δ,x> der Δ er en ikke-tom mengde med utsagn og x er et utsagn. I tillegg krever vi at ΔU {x} og ΔU{Neg(x)} er konsistente utsagnsmengder. Med andre ord kan hverken utsagnet x eller negasjonen av x utledes fra utsagnene i Δ. Dessuten krever vi at konjunksjonen av utsagnene i Δ er et kontingent utsagn.

Det følger fra dette at dersom <Δ,x> er en induktiv slutning er utsagnene x og Neg(x) kontingente utsagn. I en induktiv slutning <Δ,x> kalles utsagnene i Δ for premissene og utsagnet x for konklusjonen.

Vi kaller en induktiv slutning <Δ,x> for akseptabel hvis og bare hvis konklusjonen bør aksepteres relativt til konjunksjonen av premissene, med andre hvis og bare hvis man har Ba(x, SNu(Δ)).

La oss nå per definisjon sette Δ(m) = {c(0),..., c(m)} om mêN. Merk at c er definert som ovenfor. La oss videre definere φ(m) ved:

φ(m) = <Δ(m), SNu/i,0,∞/c(π(i))>

Da vil, i lys av våre bemerkninger ovenfor, φ(m) oppfylle kravene til en induktiv slutning. Anta nå at <X;1,X;2,π,d> er et regulært egenskapspar. Vil det da finnes et naturlig tall m0 slik at man, for alle n>=m0, har at φ(m) er en akseptabel induktiv slutning? Finnes det et slikt naturlig tall m0 kaller vi det regulære egenskapsparet for induktivt generaliserbart.

Den påstand at ethvert regulært egenskapspar er induktivt generaliserbart skal vi i det følgende kalle for Tese I. Det bemerkes at denne tesen naturligvis er formaliserbar innen for rammen av akseptanseteorien B;1. Det bør også noteres at dette er en meget sterk antagelse. Et hovedresultat som vi skal vise i dette avsnittet er at denne tesen er ekvivalent med den påstand at det for enhver mulig verden wêI bare kan finnes et endelig antall verdener w' der w' Rw, dvs. der w' har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w. Beviset for denne påstand er temmelig langt og kan neppe karakteriseres som trivielt. Det kan også vises at denne tesen impliserer at mengden av mulige verdener I er likemektig med de naturlige tall, med andre ord at Cd(I) = Aleph;0.

Før vi går videre skyter vi inn noen bemerkninger om det vi har kalt regulære egenskapspar. Anta E;1 og E;2 er monadiske egenskaper og anta, som ovenfor, at d er en mengde der d Inkl D og π : N -(1-1,på)→d. Er da aêD har vi at u(E;i,a), instansieringen av E;i med hensyn på a, er det utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de mulige verdenene hvor man har at a er med i ekstensjonen til E;i (i=1,2). Med andre ord har vi at

u(E;i,a) = μ;-1(Mg(w: wêI & aêEkst;w(E;i)))

Vi kan da definere X;i ved å sette X;i= λ/aêd/(u(E;i,a)). Da har vi naturligvis X;iêU^d og dessuten har vi for alle aêd at X;i(a) = u(E;i,a). (i=1,2).

Man ser fra dette at istedet for å arbeide med kvadrupler av typen <X;1,X2,π,d> som oppfyller kravene (1) - (5) som vi nevnte ovenfor, kunne vi istedet ha operert med tupler <E;1,E;2,π,d> som oppfylte helt analoge krav. Til ethvert tuple av den siste typen vil det da finnes et helt tilsvarende tuple av den første typen. Det omvendte ville også holde.

Vi skal nå formulere det vi ovenfor kalte Tese I eksplisitt. Det bør bemerkes, som nevnt, at

© Morten Harboe Rognes 2013

denne tesen er en formel i språket til teorien B;1 og at våre betraktninger i forbindelse med denne tesen kan formaliseres fullstendig innenfor denne teoriens rammer.

Tese I For alle X;1, X;2, π, d gjelder at dersom
(i) d Inkl D
(i) X;1,X;2ê(U^d)
(ii) π: N - (1-1, på)→ d
(iii) (An)(nêN → μ(SNu/i,0,n+1/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))])
SInkl μ(SNu/i,0,n/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))]))
(iv) μ(G;d(X;1,X;2))≠ø
så gjelder:
(Em)[mêN & (An)(n >= m. →
Ba(G;d(X;1,X;2), SNu/i,0,n/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))]))]

I det følgende forutsetter vi at R er en preferanserelasjon over mengden av mulige verdener I. Vi skal først innføre visse begreper som er spesielt hensiktsmessige i forbindelse med preferanserelasjoner:

Definisjon 12.1: (i) xR*y ↔. xRy & ¬(yRx)
(ii) x L(R) y ↔. xRy & yRx
(iii) [x];R = Mg(y: yêI & y L(R) x)

Er R en preferanserelasjon over I innebærer xR*y at x er strengt R-bedre enn y. x L(R)y innebærer at x og y er R-ekvivalente. [x];R der xêI er R-ekvivalensklassen assosiert med verdenen x. Det følgende teorem er av en temmelig elementær natur, men angir ikke desto mindre noen viktige egenskaper til preferanserelasjoner:

Teorem 12.1: Anta R er en preferanserelasjon over I. Da gjelder følgende påstander:
(a) xR*y & yR*z → xR*z
(b) xR*y → ¬(yR*x)
(c) (Aw)(wêI → ¬(wR*w))
(d) xL(R)y & yR*z → xR*z
(e) x L(R) y & zR*y → zR*x
(f) wêI → w L(R) w
(g) x L(R)y & y L(R)z → xL(R)z
(h) x L(R) y → yL(R)x
(i) xRy ↔ (xR*y v xL(R)y)
(j) xL(R)y v xR*y v yR*x

Man ser fra denne satsen at L(R) er en ekvivalensrelasjon over I og at den strenge R-relasjonen R* har de egenskaper man intuitivt vil forvente.

Den følgende sats oppsummerer de mest elementære egenskapene til R-ekvivalensklasser:

Teorem 12.2: Anta R er en preferanserelasjon over I. Da gjelder:

© Morten Harboe Rognes 2013

(a) x,yêI & [x];RΩ[y];R ≠ø → [x];R = [y];R
(b) x,yêI → . (x L(R) y ↔ [x];R=[y];R)
(c) x,yêI & xL(R)y → [x];R Ω [y];R ≠ø
(d) I = UN/wêI/([w];R)
(e) (Ax)(xêI → xê[x];R)
(f) (Ax)(xêI → [x];R ≠ø)

De to satsene som her er nevnt angir de viktigste egenskapene ved preferanserelasjoner som vi trenger i første omgang.

I det følgende vil vi kalle en R-ekvivalenseklasse for et preferanse-nivå. I lys av Teorem 12.1 og 12.2 ser man at dersom man plukker ut ett og bare ett element fra alle preferansenivåer og begrenser R til denne mengden a vil Rest(R,a), restriksjonen av R til a være en lineær ordning dersom R er en preferanserelasjon over I.

I forhold til de to teoremene vi har nevnt er den følgende sats mer substansiell. Den spiller en viktig rolle i vår analyse av Tese I.

Teorem 12.3: Anta w;0êI og anta at Card(Mg(w: wR*w;0)) >= Aleph;0. Da har vi at enten (a), (b) eller (c) nedenfor holder.

(a) Det finnes en mengde α der
α Inkl Mg(w: wR*w;0) & Card(α) < Aleph;0
og hvor man har:
UN(Mg([x];R: xêα)) = Mg(w: wR*w;0) og
(Ax)(Ay)(x,yêI & x≠y. → [x];RΩ [y];R =ø)
(b) Det finnes en sekvens s der s: N → Mg(w: wR*w;0) og hvor man har:
(An)(nêN → s(n) R* s(n+1)) & (An)(nêN → s(n)R*w;0)
(c) Det finnes en sekvens s der s: N → Mg(w: wR*w;0) og hvor man har:
(An)(nêN → s(n+1) R* s(n)) & (An)(nêN → s(n)R*w;0)

Bevis: Anta w;0êI og at Card(Mg(w: wR*w;0)) >=Aleph;0. Betrakt Mg([w];R : wR*w;0) Det er da bare to muligheter (i) Mg([w];R : wR*w;0) er endelig eller (ii) Mg([w];R : wR*w;0) er ikke en endelig mengde.

Tilfelle (i): Er Mg([w];R : wR*w;0) en endelig mengde kan vi fra hver ekvivalensmengde plukke ut et element. Vi lar α være mengden av alle disse elementene. Da har vi (1) Cd(α) < Aleph;0 og α Inkl Mg(w: wR*w;0). Det er også lett å se at vi har Mg(w: wR*w;0) = UN(Mg([x];R :xêα)) og at ekvivalensmengdene til distinkte elementer i α er disjunkte. Dette impliserer at punkt (a) i satsen holder og derfor at disjunksjonen av (a), (b) og (c) holder. Satsen

Tilfelle (ii): Man har at Mg([w];R : wR*w;0) ikke er noen endelig mengde, med andre ord har man at (+) Cd(Mg([w];R : wR*w;0)) >=Aleph;0. Vi skiller mellom to innbyrdes uforenelige undertilfelle og viser at satsen holder i begge disse tilfelle. Dette gir en et fullstendig bevis for teoremet.

Tilfelle (ii.a): Det finnes en en sekvens s der s: N → Mg(w: wR* w;0) og hvor (An)(nêN → s(n+1)R*s(n)) & (An)(nêN → s(n)R*w;0). I dette tilfelle finnes det en strengt R*-oppadstigende sekvens av elementer i Mg(w: wR* w;0). I dette tilfelle er det klart at (c) i teoremet holder og derfor at enten (a), (b) eller (c) holder. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

© Morten Harboe Rognes 2013

Tilfelle (ii.b): Det finnes ingen sekvens s som oppfyller kravene nevnt i det foregående undertilfelle, med andre ord har vi:

(2) $\neg(Es)(s: N \rightarrow Mg(w: wR^* w;0)$ &
$(An)(n\hat{e}N \rightarrow s(n+1)R^*s(n))$ & $(An)(n\hat{e}N \rightarrow s(n)R^*w;0)$

Vi setter per definisjon $\beta = Mg(x: xR^*w;0)$. Siden $Cd(\beta) >= Aleph;0$ er β naturligvis ikke-tom. Anta mot formodning at $Max(R,\beta) = \emptyset$. Da har man:

(3) $\neg(Ey)(y\hat{e}Mg(x: xR^*w;0)$ & $(Az)(zR^*w;0 \rightarrow yRz))$

Dette innebærer som man lett innser at (4) $(Ay)(y\hat{e}\beta \rightarrow (Ez)(z\hat{e}\beta$ & $zR^*y))$. Men fra (4) utleder man lett at det finnes en uendelig R*-oppadstigende kjede i β siden $\beta \neq \emptyset$. Dette strider mot (2). Vi har derfor $Max(R,\beta) \neq \emptyset$. Vi plukker da ut et element x;0 fra $Max(R,\beta)$ og betrakter mengden $\beta;1 = \beta - [x;0];R$. Anta $Max(R,\beta;1) = \emptyset$. Da vil det finnes en uendelig R*-oppadstigende kjede i $\beta;1$ siden $\beta;1 \neq \emptyset$ og derfor en oppadstigende kjede i β siden $\beta;1$ Inkl β. Dette strider mot (2). Vi kan derfor plukke ut et element x;1 fra $Max(R,\beta;1)$. Man må da åpenbart ha x;0 R* x;1. Vi ser nå på

$\beta;2 = \beta;1 - [x;1];R = \beta - UN(Mg([x;i];R : i=0,1))$

På samme måte som ovenfor kan man nå vise at $\beta;2$ må ha et maximalt element x;2 og at man har $x;0R^*x;1$ & $x;1R^*x;2$ & $x;2\ R^*w;0$. På denne måten kan man nå, siden der er uendelig mange nivåer i β og alle har en høyere rang enn nivået til w;0, konstruere en uendelig nedadstigende kjede i β. Dette innebærer at det finnes en s der vi har:

$s: N \rightarrow Mg(w: wR^* w;0)$ &
$(An)(n\hat{e}N \rightarrow s(n)R^*s(n+1))$ & $(An)(n\hat{e}N \rightarrow s(n)R^*w;0)$

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder i dette tilfellet og at vi derfor også må ha at enten (a), (b) eller (c) holder. Man ser at satsen holder i alle tilfelle.

Dette avslutter beviset. **QED**.

Definisjon 12.2: Vi kaller en sekvens s for en *strengt nedentil monoton utsagnssekvens* hvis og bare hvis s oppfyller de følgende krav:

(i) $s : N \rightarrow U$
(ii) $(An)(n\hat{e}N \rightarrow \mu(SNu/j,0,n+1/(s(j)))\ SInkl\ \mu(SNu/j,0,n/(s(j))))$
(iii) $\mu(SNu/j,0,\infty/(s(j))) \neq \emptyset$

For strengt nedentil monotone utsagnssekvenser gjelder åpenbart at

$(An)(n\hat{e}N \rightarrow \mu(SNu/j,0,\infty/(s(j)))\ SInkl\ \mu(SNu/j,0,n/(s(j))))$

og derfor at

$(An)(n\hat{e}N \rightarrow \neg LK(SNu/j,0,\infty/(s(j)), SNu/j,0,n/(s(j))))$

Man ser også ganske lett at eksistensen av strengt nedentil monotone utsagnssekvenser er ekvivalent med den påstand at mengden av mulige verdener er minst tellbart uendelig. Eksistensen av slike sekvenser følger derfor fra våre utsagnsteoretiske aksiomer.

Vi skal nå vise den følgende sats:

Teorem 12.4: (a) Anta s er en strengt nedentil monoton utsagnssekvens. Da finnes π,d, X;1, og X;2 som oppfyller følgende krav:

(i) d er inkludert i mengden av mulige individer, ie. d Inkl D
(ii) $\pi : N - (1\text{-}1,på) \rightarrow d$
(iii) $X;1,X;2\ \hat{e}\ U\hat{}d$
(iv) $(Ak)(k\hat{e}N \rightarrow s(k) = C(X;1(\pi(k)), X;2(\pi(k))))$

© Morten Harboe Rognes 2013

(v) G;d(X;1,X;2) = SNu/j,0,∞/s(j)

(b) Anta X;1, X;2, π, d oppfyller følgende krav:

(i) d Inkl D

(ii) X;1,X;2ê(U^d)

(iii) π: N - (1-1, på)→ d

(iv) (An)(nêN → μ(SNu/i,0,n+1/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))]) SInkl μ(SNu/i,0,n/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))]))

(v) μ(G;d(X;1,X;2))≠ø

Definer s ved å sette, for alle jêN:

s(j) = C(X;1(π(j)), X;2(π(j)))

Da har man at s er en strengt nedentil monoton utsagnssekvens.

Bevis: *Ad (a)*: Anta s er en strengt nedentil monoton utsagnssekvens. Vi vil først vise

(1) (Ak)(kêN → Cd(μ(s(k))) >= Aleph;0)

Anta derfor for vilkårlig k at (2) kêN. Fra definisjonen av strengt nedentil monoton utsagnssekvens har vi:

(3) (An)(nêN → μ(SNu/j,0,n+1/(s(j)) SInkl μ(SNu/j,0,n/(s(j)))

Dette impliserer

(4) (An)(nêN → [μ(SNu/j,0,n/(s(j))) - μ(SNu/j,0,n+1/(s(j)))] ≠ ø)

og derfor (5) (An)(n>=k → [μ(SNu/j,0,n/(s(j))) - μ(SNu/j,0,n+1/(s(j)))] ≠ ø)

Nå kan lett utlede fra (3) ved hjelp av induksjon:

(6) (An)(Am)(n=<m → μ(SNu/j,0,m/(s(j))) Inkl μ(SNu/j,0,n/(s(j))))

(6.1) (An)(Am)(n<m → μ(SNu/j,0,m/(s(j))) SInkl μ(SNu/j,0,n/(s(j))))

Fra dette og (3) følger:

(7) UN/n,k,∞/[μ(SNu/j,0,n/(s(j))) - μ(SNu/j,0,n+1/(s(j)))] Inkl μ(SNu/j,0,k/(s(j)))

Sett nå per definisjon φ(k)=μ(SNu/j,0,k/(s(j))) - μ(SNu/j,0,k+1/(s(j))). Vi ønsker å vise at

(8) (Ak)(Ak')(k,k'êN & k≠k' → φ(k)Ωφ(k')=ø)

Anta derfor k≠k' for vilkårlige k,k'êN. Det er da to muligheter: k<k' og k>k'. Vi ser bare på det første tilfellet siden beviset i det andre tilfellet kan gjennomføres på en helt analog måte. Anta derfor at k<k'. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x slik at:

(9) xêφ(k)Ωφ(k'). Da har vi ved hjelp av definisjonen av φ at

(10) xê[μ(SNu/j,0,k/(s(j))) - μ(SNu/j,0,k+1/(s(j)))] og

(11) xê[μ(SNu/j,0,k'/(s(j))) - μ(SNu/j,0,k'+1/(s(j)))]

Siden k<k' har vi at k+1=<k'. Videre har vi fra (11) at (12) xê μ(SNu/j,0,k'/(s(j))). Fra dette og det at k+1=<k' følger ved hjelp av (6) at

(13) μ(SNu/j,0,k/(s(j))) Inkl μ(SNu/j,0,k+1/(s(j)))

Fra (12) og (13) følger xêμ(SNu/j,0,k+1/(s(j))). Dette strider imidlertid mot (10).

Fra (5), (7) og (8) følger at μ(SNu/j,0,k/(s(j))9 inneholder et tellbart uendelig antall innbyrdes disjunkte og ikke-tomme delmengder. Fra dette følger åpenbart at Cd(μ(SNu/j,0,k/(s(j)))) >=Aleph;0. Men μ(SNu/j,0,k/(s(j))) Inkl μ(s(k)). Fra disse to forhold følger (1) som dermed kan anses for etablert.

Siden Cd(μ(s(k))) >= Aleph;0 for alle kêN kan vi, i det vi benytter utvalgsaksiomet, velge ut fra de diverse μ(s(k)) to mengder X;k og Y;k slik at

(14.1) X;k≠ø & X;k SInkl Y;k SInkl μ(s(k))

Vi definerer så to utsagnssekvenser <α;k>/kêN/ og <β;k>/kêN/ ved å sette:

© Morten Harboe Rognes 2013

(14.2) α;k= μ;-1(I-(μ(s(k))-X;k))

(14.3) β;k = μ;-1(Y;k)

Vi kan nå konstruere π,d, X;1 og X;2 som oppfyller kravene i satsen.

Vi lar d være en hvilken som helst mengde av mulige individer som er likemektig med de naturlige tall. Fra de egenskapsteoretiske og mengdeteoretiske aksiomene følger det at en slik mengde med mulige individer finnes. Det finnes derfor π slik at

(15) π: N -(1-1, på)→d

Vi definerer så X;1 og X;2 slik:

(16.1) X;1= Mg(<a, α;(π;-1(a))>: aêd)

(16.2) X;2= Mg(<a, β;(π;-1(a))>: aêd)

Det er nå tilstrekkelig å vise at kravene (iii),(iv) og (v) er oppfyllt. Siden α;k og β;k er utsagn for alle kêN skulle det være klart at vi har: (17) X;1,X;2êU^d. Anta k er et vilkårlig element der: kêN. Da har vi at

(18) X;1(π(k))= α;(π;-1(π(k)))= α;k = μ;-1(I-(μ(s(k))-X;k)). Dessuten har vi:

(19) X;2(π(k)) =β;(π;-1(π(k))) =β;k =μ;-1(Y;k).

Vi har da at (20) C(X;1(π(k)), X;2(π(k))) = (I-(I-(μ(s(k))-X;k)))U Y;k =
(μ(s(k)) - X;k)U Y;k = μ(s(k)). Siden k var vilkårlig element i N har vi derfor:

(21) (Ak)(kêN → C(X;1(π(k)), X;2(π(k))) = s(k))

Nå har vi G;d(X;1,X;2) = SNu(Mg(C(X;1(a),X;2(a)))) =
SNu/k,0,∞/(C(X;1(π(k)), X;2(π(k))) = SNu/k,0,∞/(s(k))

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (a) i satsen.

Ad (b): Anta at forutsetningene under punkt (b) holder. Fra definisjonen av s følger da at s: N→ U. Fra definisjonen av s og forutsetning (iv) følger:

(Ak)(kêN →μ(SNu/j,0,k+1/(s(j))) SInkl μ(SNu/j,0,k/(s(j)))). Fordi
G;d(X;1,X;2) = SNu/j,0,∞/(C(X;1(π(j)),X;2(π(j))) = SNu/j,0,∞/(s(j)) må vi i lys av forutsetning (v) ha at μ(SNu/j,0,∞/(s(j)))≠ø. Dette viser at s er en nedentil strengt monoton utsagnssekvens. Dette viser at punkt (b) holder. **QED**.

Ved hjelp av Teorem 12.4 kan man bevise den følgende sats som representerer et vesentlig trinn i vår analyse av Tese I:

Teorem 12.5: Følgende to påstander er ekvivalente:

(a) Tese I

(b) For enhver strengt nedentil monton utsagnssekvens s gjelder:
(Em)(mêN & (An)(n >= m →
Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)), SNu/j,0,n/(s(j)))))

Bevis: (i) Vi viser først at (a) impliserer (b). Anta derfor at (1) Tese I holder og dessuten for vilkårlig s at (2) s er en nedentil strengt monoton utsagnssekvens. Fra (2) kan man ved hjelp av Teorem 12.4 slutte at det finnes π,d, X;1 og X;2 der vi har:

(3.1) d er en mengde med mulige individer og π: N-(1-1,på) → d

(3.2) X;1,X;2êU^d

(3.3) (Ak)(kêN → s(k)=C(X;1(π(k)),x;2(π(k))))

(3.4) G;d(X;1,X;2) = SNu/j,0,∞/(s(j))

Siden s er en nedentil strengt monoton utsagnssekvens følger fra definisjonen at

(4) ø≠μ(SNu/j,0,∞/(s(j)))= μ(G;d(X;1,X;2))

© Morten Harboe Rognes 2013

Siden s er en nedentil monoton utsagnssekvens har man at

(5) (An)(nêN → μ(SNu/j,0,n+1/(s(j))) SInkl μ(SNu/j,0,n/(s(j))))

Fra dette følger ved hjelp av (3) at:

(6) (An)(nêN → μ(SNu/i,0,n+1/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))])
SInkl μ(SNu/i,0,n/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))]))

Fra (3.1), (3.2), (4), (6) og Tese I følger:

(7) (Em)[mêN & (An)(n >= m. →
Ba(G;d(X;1,X;2), SNu/i,0,n/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))]))]

Men fra dette, (3.3) og (3.4) kan man slutte:

(Em)[mêN & (An)(n >= m. →
Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)), SNu/j,0,n/[s(j)]))]

Fra dette følger det at (b). Vi har nå vist at (a) impliserer (b).

(ii) Vi må også vise at (b) impliserer (a). Anta derfor at (b) holder. og anta at X;1, X;2, π, d oppfyller følgende krav:

(8.0) d Inkl D
(8.1) X;1,X;2ê(U^d)
(8.2) π: N - (1-1, på)→ d
(8.3) (An)(nêN → μ(SNu/i,0,n+1/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))])
SInkl μ(SNu/i,0,n/[C(X;1(π(i)),X;2(π(i))]))
(8.4) μ(G;d(X;1,X;2))≠ø

Definer s ved å sette, for alle jêN:

(9) s(j) = C(X;1(π(j)), X;2(π(j)))

Ved hjelp av Teorem 12.4 kan man da slutte at s er en nedentil strengt monoton utsagnssekvens. Det følger da ved hjelp av (b) at:

(10) (Em)(mêN & (An)(n >= m →
Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)), SNu/j,0,n/(s(j)))))

Men fra (9) følger:

(11) G;d(X;1,X;2) = SNu/j,0,∞/(C(X;1(π(j)), X;2(π(j))))=
SNu/j,0,∞/(s(j))

og dessuten at (12) SNu/j,0,n/(s(j))= SNu/j,0,n/(C(X;1(π(j)), X;2(π(j))))

Fra (10), (11) og (12) kan man slutte at konsekventen i Tese I holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Dersom man bruker "Q(s)" som forkortelse for uttrykket "s er en strengt nedentil monoton utsagnssekvens" kan påstanden i punkt (b) formuleres mer kompakt som en egen tese:

Tese II (As)(Q(s) → (Em)(mêN & (An)(n >= m →
Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)), SNu/j,0,n/(s(j)))))

Vårt hovedteorem kan nå formuleres slik:

Teorem 12.6: (Hovedteorem) Følgende påstander er ekvivalente:

(a) Tese I
(b) Tese II
(c) (Aw)(wêI →. Card(Mg(x:xêI & xR*w)) < Aleph;0 &
Card(Mg(x:xêI & xL(R) w)) < Aleph;0)

© Morten Harboe Rognes 2013

(d) (Aw)(wêI → Card(Mg(x:xêI & x R w)) < Aleph;0)
(e) (Ef)(f: N-(1-1,på)-I & (An)(nêN → f(n)R*f(n+1)) &
(An)(nêN → Card([f(n)];R) <Aleph;0 & UN(Mg([x];R: xêRgn(f))) =I)

Bevis: (A) At Tese I og Tese II er ekvivalente følger umiddelbart fra Teorem 12.5 og definisjonen av Tese II.

(B) Vi skal nå vise at (b) og (c) er ekvivalente. Vi skal først vise at (b) impliserer (c). Dette gjøres i avsnittet (B I). Dernest at implikasjonen den andre veien holder. Dette gjøres i avsnittet (B II).

(B I) For å vise at (b) impliserer (c) er det tilstrekkelig å vise at negasjonen av (c) impliserer negasjonen av Tese II. Anta derfor at (c) ikke holder, med andre ord anta at

(1) (Ew)(wêI & (Cd(Mg(x: xêI & xR*w)) >=Aleph;0 v
Cd(Mg(x: xêI & x L(R) w)) >=Aleph;0))

Dette impliserer at det finne noe w0 der w0êI og der vi har:

(2) Cd(Mg(x: xêI & xR*w0)) >=Aleph;0 v
Cd(Mg(x: xêI & x L(R) w0)) >=Aleph;0

I lys av (2) er det nærliggende å skille mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): Cd(Mg(x: xêI & xR*w0)) >=Aleph;0. Da finnes det en funksjon ξ der vi har: (3) ξ : N-(1-1)→ Mg(x: xêI & xR*w0). Vi definerer en utsagnssekvens s slik:

(3.1) s(k) =μ;-1({w0}U(Rgn(ξ) -Mg(ξ(r): r<k)) for kêN

Da har vi om kêN at Mg(ξ(r): r<k) SInkl Mg(ξ(r): r<(k+1)) og siden ¬(w0êMg(x: xêI & xR*w0) og derfor ikke er med i Rgn(ξ) har vi at

(4) μ(s(k+1)) = {w0}U(Rgn(ξ) -Mg(ξ(r): r<k+1) SInkl
{w0}U(Rgn(ξ) -Mg(ξ(r): r<k) = μ(s(k))

Det følger fra dette at (5) (Ak)(kêN → μ(SNu/j,0,k+1/(s(j))) SInkl μ(SNu/j,0,k/(s(j)))). Dessuten har vi fra definisjonen av s at (6) s: N → U.

Vi må nå vise at μ(SNu/j,0,∞/(s(j)) ≠ø. Det vil være tilstrekkelig å bevise

(7) SNu/j,0,∞/(s(j)) = {w0}. Man ser lett fra definisjonen av s at (Ak)(kêN → w0êμ(s(k))). Dette impliserer {w0} Inkl μ(SNu/j,0,∞/(s(j))). Som man ser holder derfor inklusjonen mot venstre i (7). Anta for reduktio ad absurdum at

(8) {w0} SInkl μ(SNu/j,0,∞/(s(j))).

Da finnes w1 der

(8.1) w1êμ(SNu/j,0,∞/(s(j))) & w1≠w0.

Fra dette følger at (Aj)(jêN & j>=0 → w1êμ(s(j))). Da har vi w1ês(0). Etter definisjonen av <s(k)>/kêN/ følger da at w1ê({w0}U(Rgn(ξ) -Mg(ξ(r): r<0)). Siden w1≠w0 følger det at w1êRgn(ξ) -Mg(ξ(r): r<0). Men Mg(ξ(r): r<0)=ø. Det følger at w1êRgn(ξ). Fra dette kan man slutte w1=ξ(k0) for noe k0êN. Da følger ved hjelp av definisjonen av s at ¬(w1êμ(s(k0+1))). Da har vi ¬(w1êμ(SNu/j,0,k0+1/(s(j)))). Men vi har

μ(SNu/j,0,∞/(s(j))) Inkl μ(SNu/j,0,k0+1/(s(j))).

Det følger at ¬(w1êμ(SNu/j,0,∞/(s(j)))). Men dette strider mot (8.1). Dette viser at (7) holder. Fra (5), (6) og (7) kan man slutte at s er en nedentil strengt monoton utsagnssekvens.

Vi skal nå vise at s ikke oppfyller konsekventen i Tese II. Det vil være tilstrekkelig å vise at (9) (Ak)(kêN → ¬Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)), SNu/j,0,k/(s(j)))).

Anta kêN for vilkårlig k. Det er lett å se på grunnlag av definisjonen av s at

© Morten Harboe Rognes 2013

s(k) = SNu/j,0,k/(s(j)). Det er nå to muligheter når det gjelder Max(R,μ(s(k))). Denne mengden kan være tom eller ikke-tom. Har vi at den er tom følger det at Max(R,SNu/j,0,k/(s(j)))=ø og dermed følger ¬Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)), SNu/j,0,k/(s(j))). (9) holder i dette tilfellet. Anta Max(R, μ(s(k)))≠ø. Nå har vi i lys av definisjonen av s(k) at ξ(k)ês(k). Dessuten følger det fra definisjonen av s og ξ at ξ(k) R*w0. Inneholder derfor μ(s(k)) et R-maksimalt element w må vi ha w R*w0. Dette innebærer at μ(SNu/j,0,∞/(s(j))) som jo er identisk med {w0} ifølge (7) ikke kan være inkludert i Max(R, μ(s(k))) = Max(R,SNu/j,0,k/(s(j))). Vi har derfor også i dette tilfelle at ¬Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)), SNu/j,0,k/(s(j))). I begge tilfelle har vi vist at dette holder. Det følger at (9) holder og dermed at Tese II ikke holder.

Tilfelle (ii): Cd(Mg(x: xêI & x L(R) w0)) >=Aleph;0. Da finnes åpenbart en funksjon ξ der (10) ξ: N-(1-1)→(Mg(x:xêI & x L(R) w0)- {w0}). Vi definerer så en utsagnssekvens s på samme måte som i forrige tilfelle i det vi setter:

(11) s(k) = μ;-1({w0}U (Rgn(ξ) - Mg(ξ(r): r<k))) for kêN.

På nøyaktig samme måte som i Tilfelle (i) kan man vise at s er en nedentil strengt monoton utsagnssekvens og at (12) μ(SNu/j,0,∞/(s(j)))= {w0}. Anta nå for vilkårlig k at (13) kêN. På samme måte som ovenfor ser man at s(k) = SNu/j,0,k/(s(j)). Videre innser man lett at ξ(k)ês(k). Siden ξ(k)êRgn(ξ) har vi i lys av (10) at (14) ξ(k)≠w0. Nå har vi at s(k) Inkl Mg(x:xêI & x L(R) w0) og derfor at Max(R,s(k)) = s(k). Men ξ(k)ês(k). Det følger i lys av (12) og (14) at ξ(k)êMax(R,μ(s(k))) = Max(R,μ(SNu/j,0,k/(s(j)))) og ¬(ξ(k) êμ(SNu/j,0,k/(s(j)))). Fra dette følger at

¬(Max(R,μ(SNu/j,0,k/(s(j)))) Inkl μ(SNu/j,0,∞/(s(j)))

Men herav følger ¬Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)), μ(SNu/j,0,k/(s(j)))). Dette viser at Tese II heller ikke holder i dette tilfellet.

Dermed har vi levert et fullstendig bevis for at punkt (b) i teoremet, nemlig Tese II, impliserer punkt (c).

(B II) Vi skal nå vise at punkt (c) i teoremet impliserer punkt (b), det vil si Tese II. Anta derfor at (c) holder. Dette innebærer at

(1) (Aw)(wêI → Cd(Mg(x:xêI & xR*w)) < Aleph;0)

(2) (Aw)(wêI → Cd(Mg(x:xêI & x L(R) w)) < Aleph;0)

Anta videre (3) Q(s). Dette innebærer at s er en nedentil strengt monoton utsagnssekvens. For å øke lesbarheten skal vi i det følgende bruke de følgende definisjoner. Vi setter

(4.1) φ(k) = μ(SNu/j,0,k/(s(j)))

(4.2) φ(∞) = μ(SNu/j,0,∞/(s(j)))

Siden s er en strengt nedentil monton utsagnssekvens har vi derfor:

(5.1) (Ak)(kêN → φ(k+1) SInkl φ(k))

(5.2) (Ak)(Aj)(k,jêN & k<j →φ(j) SInkl φ(k))

(5.3) (Ak)(kêN → φ(∞) SInkl φ(k))

(5.4) φ(∞) ≠ ø

Anta nå for reduktio ad absurdum at Max(R, φ(∞))=ø. Da følger at det vil finnes en uendelig oppadstigende kjede av verdener a;1, a;2, a;3, ... osv. i φ(∞) slik at a;(n+1)R* a;n for alle n>=1. Men dette strider mot (1). Vi har derfor:

(6) Max(R,φ(∞))≠ø. Det følger at det må finnes w0êI slik at

(7) w0êMax(R,φ(∞))

Siden w0êI følger det ved hjelp av (1) og (2) at

© Morten Harboe Rognes 2013

(8) Mg(x:xêI & xRw0) er endelig

Vi setter nå per definisjon: (9) γ = Mg(x:xêI & xRw0) -Max(R, $\varphi(\infty)$) og skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): ¬(Ex)(xêγ & (Ek)(kêN & xêφ(k)). Vi ønsker å vise at

(10) (Ak)(kêN → Max(R,φ(k)) Inkl Max(R,$\varphi(\infty)$))

Anta derfor for vilkårlig k og w at (11) kêN & wêMax(R,φ(k)). Da har vi at (12) wêφ(k). Anta for reduktio at ¬(wRw0). Da følger at (13) w0 R*w. Nå har vi

w0êMax(R,$\varphi(\infty)$) Inkl $\varphi(\infty)$ Inkl φ(k) i lys av (7) og (5.3) Men fra dette, (12) og (13) følger ¬(wêMax(R,φ(k)) som strider mot (11). Det følger at wRw0. Da må vi ha at (14) wêMg(x: xêI & xRw0). Men vi har wêφ(k) & kêN ifølge (11) og (12). Det følger da at (15) ¬(wêγ). Fra (14) og (15) følger sammen med (9), definisjonen av γ, at wêMax(R, $\varphi(\infty)$). Siden w,k var vilkårlig elementer slik at (11) har vi derfor at (10) holder. Fra (1) og (2) følger at enhver delmengde av I må inneholde maksimale elementer. Siden φ(k) er en delmengde av I har vi at Max(R, φ(k))≠ø. sammen med (10) impliserer dette:

(Ak)(kêN → ø≠ Max(R,φ(k)) Inkl $\varphi(\infty)$). Herav har vi så:

(Em)(mêN & (An)(n>=m → ø≠ Max(R,φ(k)) Inkl $\varphi(\infty)$)). Men dette impliserer i lys av definisjonen av φ at

(Em)(mêN & (An)(n>=m → Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)),SNu/j,0,n/(s(j))))

Dette viser at Tese II holder i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): (Ex)(xêγ & (Ek)(kêN & xêφ(k)). Sett per definisjon

(16) δ = Mg(x: xêγ & (Ek)(kêN & xêφ(k))). Siden γ er endelig fordi den er en delmengde av den endelige mengden Mg(x:xêI & xRw0), jamfør (8), har vi at

(17) δ={b,1,....,b;r} for noe r >=1. Vi kan anta at de forskjellige b;1,...,b;n er distinkte. Fra definisjonen av γ følger at (18) γ Ω Max(R,$\varphi(\infty)$) =ø. Siden δ Inkl γ følger da at (19) δ Ω Max(R,$\varphi(\infty)$) =ø. Anta for reduktio at b;iê$\varphi(\infty)$ for noe i=1,...,r. Siden w0êMax(R,$\varphi(\infty)$) ville det da følge at w0Rb;i. På den annen side har vi b;iêδ Inkl γ. Vi ville da i lys av definisjonen av γ ha b;iRw0. Men da b;i L(R)w0 og siden b;iê$\varphi(\infty)$ ville vi i så fall ha b;iêMax(R,$\varphi(\infty)$). Men det er umulig siden b;iêγ. Vi har derfor for alle b;i'ene at ¬(Ak)(kêN → b;iêφ(k)). Med andre ord har vi for enhver b;i at (Ek)(kêN & ¬(b;iêφ(k))). La Min(b;i) være den minste k slik at ¬(b;iêφ(k)). Da har vi ¬(b;iêφ(r)) for alle r>=Min(b;i). La nå q være det største tallet av de diverse Min(b;i) ettersom i=1,...,r. Det følger da at

(20) {b;1, ...,b;r}Ωφ(q)=ø

Det følger da at for alle m>=q har vi at (21) φ(m)Ω γ =ø. For hadde vi noe xêφ(m) & xêγ, ville vi ha xêδ og derfor x=b;i. Men da ville vi ha b;iêφ(m) Inkl φ(q). Dette strider mot (20).

Anta nå at m er vilkårlig og m>=q. Vi skal vise

(22) Max(R,φ(m)) Inkl Max(R,$\varphi(\infty)$).

Anta derfor for vilkårlig w at (23) wêMax(R,φ(m)). Anta for reduktio ad absurdum at (24) ¬(wRw0). Fra (23) følger wêφ(m). Videre har vi w0êMax(R,$\varphi(\infty)$). Siden Max(R,$\varphi(\infty)$) Inkl $\varphi(\infty)$ Inkl φ(m) følger det at w0êφ(m). Fra (24) følger w0R*w. Vi har derfor w,w0êφ(m) & w0R*w. Da ¬(wêMax(R,φ(m)) som strider mot (24). Det følger at (25) wRw0. Da (26) wêMg(x:xêI & xRw0). Fra (23) følger wêφ(m) og derfor ved hjelp av (21) at ¬(wêγ). Fra dette, definisjonen av γ og (26) følger wêMax(R,$\varphi(\infty)$). Dette viser at (22) holder. Vi har nå vist

(Am)(m>=q → Max(R,φ(m)) Inkl Max(R,$\varphi(\infty)$)) Fra dette følger:

(23) (Am)(m>=q → Max(R,φ(m)) Inkl $\varphi(\infty)$)

Siden φ(m) Inkl I for alle mêNhar vi ilys av (1) at Max(R,φ(m))≠ø for alle mêN.

© Morten Harboe Rognes 2013

Ved hjelp av dette og (23) følger (Am)(m>=q → ø≠Max(R,φ(m)) Inkl φ(∞)). Siden qêN følger det at vi har (Eq)(qêN & (Am)(m>=q → ø≠Max(R,φ(m)) Inkl φ(∞))). Fra dette, definisjonen av φ og enkelhetsprinsippet, En3, følger:

(Em)(mêN & (An)(n>=m → Ba(SNu/j,0,∞/(s(j)),SNu/j,0,n/(s(j)))))

Dette viser at Tese II også holder i dette tilfellet.

Siden Tese II holder i begge tilfellene har vi vist at (c) impliserer (b).

(C) Vi må strengt tatt vise at (c) og (d) er ekvivalente. Anta derfor først at (c) holder. Da har vi (1) (Aw)(wêI →. Cd(Mg(x:xêI & xR*w)) < Aleph;0

& Cd(Mg(x:xêI & xL(R)w))< Aleph;0)

Nå har man at (2) Mg(x: xêI & xRw) = Mg(x:xêI & xR*w) U Mg(x:xêI & x L(R)w) for alle wêI. Det er meget lett å vise dette. Anta wêI. Fra (1) følger det da at begge mengdene til høyre i (2) er endelige. Da må også selvfølgelig mengden til venstre være endelig siden unionen av to endelige mengder selv er en endelig mengde. Anta på den annen side at (d) holder. Er da wêI følger det at mengden til venstre i (2) er endelig. Da må de to mengdene til høyre også være endelige. Dette innebærer at (1), det vil si (c), holder.

(D) Vi må vise at (e) og (d) er ekvivalente.

(i) Vi viser først at (e) impliserer (d). Anta derfor at det finnes en f som oppfyller kravene nevnt i (e). La w være et vilkårlig element i I, mao. anta wêI. Da har vi i lys av det siste kravet i (e) at det finnes x slik at

(1) xêRgn(f) & wê[x];R.

Siden f: N -(1-1,på)→ I følger det at x=f(n) for noe nêN og derfor at (2) wê[f(n)];R. Vi skal nå vise at (3) Mg(x:xêI & xRw) Inkl UN/m=<n/([f(m)];R).

Siden de diverse [f(m)];R er endelige, dette følger fra det tredje kravet som stilles til f, har vi at UN/m=<n/([f(m)];R) er endelig, og derfor ved hjelp av (3) at Mg(x:xêI & xRw) er endelig. Det er derfor tilstrekkelig å vise at (3) holder. Anta derfor (4) xRw &xêI for vilkårlig x. Da må vi ha på samme måte som ovenfor at (5) xê[f(m)];R for noe mêN. Det følger fra (2) og (5) at (6) x L(R) f(m) & wL(R) f(n). Fra det andre kravet som stilles til f følger det at

(7) (Aj)(Ak)(j,kêN & j>k → f(k)R*f(j))

Hadde vi nå hatt m>n ville vi ved hjelp av (7) hatt at f(n)R*f(m). Ved hjelp av (6) ville vi da ha wR*x. Men dette strider mot (4). Det følger at m=<n og derfor ved hjelp av (5) at xêUN/m=<n/([f(m)];R). Dette viser at (e) impliserer (d)

(ii) Vi må nå vise at (d) impliserer (e). Siden R er en preferanserelasjon har vi at UN(Mg([w];R: wêI))=I og at de diverse [w];R for wêI er innbyrdes disjunkte. Videre har vi at R+ definert ved

xR+y ↔ [x,yêMg([w];R: wêI) & (Ew)(Ew')(wêx &w'êy & wR*w')]

er en lineær ordning over Mg([w];R: wêI). Ved hjelp av (d) kan man slutte at denne lineære ordningen er velfundert. R+ er derfor en velordning av Mg([w];R: wêI). I følge en velkjent mengdeteoretisk sats er enhver velordning isomorf med ordningen av ordinaltallene opp til et eller annet ordinaltall. Vi har derfor at strukturen <Mg([w];R: wêI),R+> er isomorf med <α,< > for noe ordinaltall α. Merk at "<" betegner her "mindre enn"- relasjonen mellom ordinaltall. La ξ være isomorfien mellom disse to strukturene. Denne avbilder α en-entydig og på Mg([w];R: wêI) slik at (Ax)(Ay)(x,yêOn →(x<y ↔ ξ(x)R+ξ(y))). Anta mot formodning

© Morten Harboe Rognes 2013

at α> ω. Da har vi at ξ"Mg(β:β<α) er uendelig og det følger at ξ(ω) må ha uendelig mange mulige verdener over seg som "R-bedre". Dette strider mot (d). Det følger at α=<ω. Nå kan ikke α<ω fordi vi da i lys av (d) må ha at I er endelig. Dette strider imidlertid mot aksiomet om at Cd(I) >=Aleph;0 som er et av de utsagnsteoretiske aksiomene. Det følger at α=ω. La nå η være en funksjon som plukker ut nøyaktig ett element fra hver av [w];R-klassene. Definer f ved f=Mg(<n,η(ξ(n))>: nêN) Det er da en enkel øvelse, som kan overlates til leseren, å vise at f oppfyller de kravene som stilles til den funksjonen f som påstås å eksistere under punkt (e).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED**.

§13 Oppsummering og avsluttende bemerkninger om akseptanseteorien.

I den neste delen av dette arbeidet skal vi studere forskjellige teorier om grad av troverdighet. Før vi tar fatt på de problemer som dette reiser kan det imidlertid være hensiktsmessig å foreta en oppsummering av det vi har gjort så langt. Vi startet i denne delen med å gi en beskrivelse av akseptanseteorien B;1. Vi gjorde dette ved suksesivt å presentere aksiomene som inngår i denne teorien. Som man husker var dette grunnsetningene B1 - B12. Når det gjaldt disse aksiomene fant vi at aksiomene B1 - B6 og B9 var relativt uproblematiske. Disse kunne regnes som nærmest direkte evidente. Derimot fortonte B7 og B8 seg noe mer problematiske. Vi viste at B7 var implisert av B8. I lys av mer indirekte betraktninger kom vi imidlertid til at det var gode grunner til å akseptere B8, "Arrow"-aksiomet. Dette gjaldt også de resterende grunnsetningene i teorien, nemlig B10 - B12. Vi viste så ved hjelp av et teorem bevist av Hansson at man i denne akseptanseteorien B;1, hvor de rent akseptanseteoretiske aksiomene er B1- B12, kunne utlede at det finnes en entydig bestemt preferanserelasjon R over I som oppfylte følgende krav: (+) (Ax)(Ay)(Ba(x,y) ↔ x,yêU & ø≠Max(R,μ(y)) Inkl μ(x)).
I tillegg til dette ble det demonstrert at om man starter med dette som eneste grunnsetning kan man i utlede de diverse aksiomene B1 - B12. Dette ga opphav til en ny, ekvivalent, aksiomatisering av teorien B;1, nemlig teorien B;1*.

I §8 spesifiserte vi en teori hvor de primitive predikatene i språket inneholdt både predikatet "x er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen y" og predikatet "x er et utsagn som bør aksepteres relativt til y". Vi forkortet det første med "En(x,y)" og definerte enkelhetsrelasjonen R;e ved R;e=Mg(<x,y>: En(x,y)). De grunnleggende aksiomene i denne nye teorien var fire aksiomer som impliserte at R;e var en preferanserelasjon over I og at det for hver verden alltid finnes en som er mindre enkel. I tillegg tok vi med det følgende aksiom:

(++) (Ax)(Ay)(Ba(x,y) ↔. x,yêU & ø≠ Max(R;e,μ(y)) Inkl μ(x))

Vi kalte dette aksiomet for enkelhetsprinsippet. Den nye teorien kalte vi B;2*. Vi viste at denne var ekvivalent med teoriene B;1 og B;1*. Vi viste også at dersom man fjerner akseptanse-predikatet fra språket til teorien B;2* og istedet for å oppfatte (++) som et aksiom oppfatter det som en definisjon av Ba får man en teori som er selvfølgelig er helt ekvivalent med B;2*. Denne teorien kalte vi B;2. Disse fire teoriene B;1, B;2, B;1* og B;2* er derfor helt ekvivalente. Man kan si at de bestemmer den samme teori sett fra forskjellige synsvinkler og at de gjensidig belyser og utdyper hverandre.

La oss avslutte dette avsnittet med to bemerkninger.

For det første utgjør den akseptanseteorien vi har beskrevet et naturlig grunnlag for en

© Morten Harboe Rognes 2013

teori om akseptable induktive slutninger om vi definerer en induktiv slutning slik vi gjorde i forrige paragraf, og sier at en induktiv slutning <Δ,x> er akseptabel om utsagnet x bør aksepteres relativt til konjunksjonen av utsagnene i Δ, med andre ord hvis og bare hvis man har at Ba(x,SNu(Δ)). De elementære delene av denne teorien behøver ikke nødvendigvis å være særlig interessante, men noen satser, for eksempel den som ble utleder i §12, og som impliserer at ikke alle regulære egenskapspar er induktivt generaliserbare, kan i det minste ikke sies å være trivielle.

For det andre bør det bemerkes at en påstand om at en induktiv slutning er akseptabel alltid er apriori. Er en induktiv slutning akseptabel er det logisk nødvendig at den er akseptabel. Er det ikke slik at en induktiv slutning er akseptabel er det også logisk nødvendig at den ikke er akseptabel. I tillegg virker det umulig å hevde at påstander om at et utsagn bør aksepteres relativt til et annet er analytiske. De kan ikke omformes til rent logiske sannheter ved å erstatte synonymer med synonymer. Et system av akseptable induktive slutninger er derfor et system av utsagn som både er syntetiske og apriori. Spørsmålet om en teori, for eksempel Newtons fysikk, bør aksepteres eller ikke bør aksepteres på basis av den totale evidens man har på det nåværende tidspunkt kan åpenbart ikke avgjøres ved noen empiriske undersøkelser. Et slikt spørsmål kan man bare kaste lys over ved en rent rasjonell analyse av hva som er sant i de enkleste verdenene som er kompatible med den evidens man er i besittelse av. Ingen empiriske data kan være til hjelp ved løsningen av slike, rent logiske, spørsmål.

Del II

§14 Innledning

Vi har i Del I gjort rede for flere teorier om aksepterbarhetsrelasjonen, men den hovedteorien vi stanset opp ved var teorien B;1. Denne er imidlertid ekvivalent med flere andre teorier. I denne forbindelse formulerte og undersøkte vi teoriene B;1*, B,2 og B;2*. Vi så også på visse svakere teorier.

Formålet med denne delen av vårt arbeid er å formulere en teori om relativ rasjonell grad av troverdighet. Den grad av rasjonell troverdighet som kan tilskrives et utsagn relativt til et annet, la oss kalle det y, er intet annet enn den sannsynlighet man rasjonelt sett kan tilskrive utsagnet relativt til y. De teoriene vi derfor skal beskjeftige oss med i denne delen kan derfor oppfattes som teorier om relativ sannsynlighet. Et viktig moment er imidlertid at vi her vil se på mulige sammenhenger mellom på den ene side akseptanse og på den annen side sannsynlighet, eller sagt på en annen måte, grad av troverdighet. Vi vil spesielt se på teorier som sier at dersom et utsagn x bør aksepteres relativt til et utsagn y er troverdighetsgraden til utsagnet x relativt til utsagnet y lik 1, såsant det finnes en grad av rasjonell troverdighet som kan tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y. Man kan altså ikke ta det for gitt at det finnes en rasjonell grad av troverdighet som kan tilskrives x relativt til y dersom x bør aksepteres relativt til y. Vi skal imidlertid også studere teorier som sier at dette holder generelt.

La oss gi en oversikt over innholdet i denne delen av vårt arbeid. I den neste paragrafen

© Morten Harboe Rognes 2013

definerer vi først visse begreper som er helt sentrale i sannsynlighetsteorien. Først definerer vi hva som menes med en naturlig boolsk-algebra over en ikke-tom mengde X. Dette er også hva som ofte kalles for en endelig-additiv σ-algebra over X. Dette er en delmengde av X som inneholder X selv og nullmengden og som dessuten er lukket under alle endelige boolske operasjoner over X. Dernest definerer vi hva som menes med et endelig additivt sannsynlighetsrom over X. Dette er intet annet enn et triple <X,σ,p> der X er en ikke-tom mengde, σ er en endelig-additiv σ-algebra over X og p en endelig additiv absolutt sannsynlighetsfunksjon over σ.

Vi tenker oss så at vi har for oss et sannsynlighetsrom <X,σ,p> der X er inkludert i I , mengden av alle mulige verdener. Med utgangspunkt i dette sannsynlighetsrommet definerer vi en relativ sannsynlighetsfunksjon C der domenet er inkludert i Pt(X)xPt(X) og verdi-området er inkludert i intervallet [0,1]. Vi viser at denne relative sannsynlighetsfunksjonen har visse egenskaper som tilsynelatende fikserer den. Er for eksempel y et et element i Pt(X) der det finnes et element xêPt(X) slik at <x,y> er med i domenet til C viser vi at mengden av alle de x som er slik at <x,y>êDom(C) utgjør en endelig-additiv σ-algebra og at λ/xêU/(C(x,y)) er en endelig additiv sannsynlighetsfunksjon over denne σ-algebraen. Videre viser vi at dersom <x,y> er med i domenet til C er også <xΩy,y> med i dette domenet og at dersom <x,y> er med i domenet til C har man at C(xΩy,y)=C(x,y). Videre viser vi at dersom<x,y> er med i domenet til C og C(x,y)>0 har man at også <x,xΩy> er med i domenet til C. Endelig viser vi at C oppfyller det såkalte multiplikative aksiom: Er nemlig <x,y>,<z,y> med i domenet til C, og har man at C(z,y)>0, gjelder det at C(xΩz,y) = C(x,zΩy)*C(z,y).

Dette er hva vi hovedsakelig gjør rede for i §15. Det bør bemerkes at alt som vises i dette avsnittet hovedsakelig blir bevist innenfor rammen av utsagnsteorien.

I §16 arbeider vi imidlertid innenfor rammen av språket L;e(Δ;2) som ble definert i §2. Dette språket inneholder predikatet "Cd(z,x,y)", som leses "z er den grad av rasjonell troverdighet som kan tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y". Ved hjelp av dette predikatet formulerer vi ti aksiomer, nemlig C1 - C10. Vi definerer relasjonen C ved å sette C= Mg(<<x,y>,z>: Cd(z,x,y)). Aksiomene C1 - C10 postulerer at denne funksjonen C i det vesentlige har alle de egenskapene som den funksjonen C som vi definerte og undersøkte i §15. Teorien som fremkommer når språket til egenskapsteorien E;3 utvides til L;e(Δ;2) og E;3 utvides med C1 - C10 betegner vi med C;1. Det bør bemerkes at denne teorien ikke inneholder akseptansepredikatet "Ba(x,y)" og derfor kan betraktes helt uavhengig av de akseptanseteoriene vi har behandlet i Del I.

I §17 starter vi så og si grunnarbeidet med å lage en modell for en syntese av teoriene B;1 og C;1. Vi betrakter en preferanserelasjon R over I. Er wêI kaller vi mengden av alle de elementene i I som er R-ekvivalente med w for preferansenivået assosiert med w. Vi betegner dette med "N(R,w)". Man ser at dersom to verdener er R-ekvivalente bestemmer de det samme preferansenivå. Er to verdener ikke R-ekvivalente vil de bestemme disjunkte R-nivåer. Man ser også at alle R-nivåer må være ikke-tomme og at de samlet uttømmer I.

Vi betrakter nå en struktur <I,R, <N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/,C > der I er mengden av mulige verdener, R en preferanserelasjon over I og der vi har at hvert <N(R,w),σ(w),p(w)> er et sannsynlighetsrom over N(R,w) for alle wêI. Vi forutsetter at dersom to verdener er R-ekvivalente er de assososierte sannsynlighetsrom identiske. Dette innebærer at dersom w er R-ekvivalent med w' så har man at <N(R,w),σ(w),p(w)> = <N(R,w'),σ(w'),p(w')>. Endelig er C en relativ sannsynlighetsfunksjon som er definert ved hjelp av disse sannsynlighetsrommene. Definisjonen av C gjengis ikke her, men man kan lett se hvordan den er definert ved å

© Morten Harboe Rognes 2013

konsultere Definisjon 17.1. Vi kaller en slik struktur for en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom. I §17 defineres dette begrepet helt presist.

Hvis man i forbindelse med en slik preferansestruktur:

S= <I,R, <N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/,C >

definerer en relasjon B ved å sette at B =Mg(<x,y>: x,yêU & ø≠Max(R,μ(y) Inkl μ(x)) kan preferansestrukturen også oppfattes som en modell for teorien B;1. Man ser lett at B vil ha alle de egenskapene som akseptanserelasjonen har, dvs. den oppfyller oppfyller aksiomene B1 - B12. Det som imidlertid er viktigere er at man kan vise at den relative sannsynlighetsfunksjonen som utgjør den siste komponenten i enhver slik preferansestruktur oppfyller alle aksiomene C3 - C10 i teorien C;1. Beviset for dette er forsåvidt likefrem, men detaljert gjennomført tar det noen sider. Dette resultat er hovedresultatet i §17.

I §18 tar vi utgangspunkt i språket til egenskapsteorien E;3 utvidet med de to predikatene "Ba(x,y)" som leses "utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y" og "Cd(z,x,y)" som leses "z er den grad av rasjonell troverdighet som kan tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y". Dette språket betegner vi med L;e(Δ;4). I dette språket kan alle grunnsetningene i såvel teorien B;1 og teorien C;1 formuleres. Vi kaller teorien E;3 med språket utvidet til L;e(Δ;4), og med alle de karakteristiske grunnsetningene i teoriene B;1 og C;1, dvs. aksiomene B1 - B12 og C1 - C10, lagt til som nye ikke-logiske aksiomer for BC;1. I denne teorien kan man vise at det finnes en entydig bestemt preferanserelasjon over I som oppfyller det vi kaller enkelhetsprinsippet. Med andre ord kan man vise at det finnes en og bare en preferanserelasjon R' over I slik at

(Ax)(Ay)(Ba(x,y) ↔ x,yêU & ø≠Max(R',μ(y)) Inkl μ(x))

I teorien BC;1 betegnes denne med R.

Det er karakteristisk for BC;1 at teorien ikke inneholder noen prinsipper som relaterer de to grunnbegrepene nemlig akseptanserelasjonen og og predikatet "Cd(z,xy)" til hverandre. Vi betrakter imidlertid en rekke aksiomer som gjør det. Det dreier seg formlene C11, C12a- C12d og C13 som alle spesifiseres i §18. Av disse formlene skal vi bare nevne en her nemlig C11. Innenfor rammen av teorien BC;1 definerer vi den relative sannsynlighetsfuksjonen C ved C= <<x,y>,z> : Cd(z,x,y)). C11 er da det følgende aksiom:

Ba(x,y) & <x,y>êDom(C) → C(x,y) =1

Det denne grunsetningen sier er at dersom et utsagn x bør aksepteres relativt til utsagnet y, og x kan tilskrives en grad av troverdighet relativt til y, er troverdighesgraden til x relativt til y lik 1.

Utvides nå teorien BC;1 med de nye grunnsetningene vi har nevnt, mao. C11, C12a-C12d og C13 som nye ikke-logiske aksiomer får man en en mer omfattende teori. Vi kaller denne for BC;2. Det vi nå viser er at dersom S er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetssrom, med andre ord dersom S=<I,R,<N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/, C>, og vi definerer Ba slik som antydet ovenfor, kan ikke bare aksiomene C3 - C10 i teorien C;1 utledes, men også aksiomene C11, C12a - C12d og C13. Dessuten kan man utlede B1 - B12. Dette er det ene hovedresultatet i §18.

Det andre hovedreultatet er dette. Man kan vise at man innenfor rammen av BC;1 kan man definere, på en helt naturlig måte, en struktur S=<I,R,<N(R,w),σ'(w),p'(w)>/wêI/, C'> og så vise to ting om denne, nemlig at den (i) er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom og (ii) at den definerete funksjonen C' er identisk med C. Her er C definert som i BC;1 ved C= Mg(<<x,y>,z>: Cd(z,x,y)). Dette er det andre hovedresultatet i §18. I dette avsnittet studerer vi også en sterkere versjoner av C11, nemlig

© Morten Harboe Rognes 2013

$Ba(x,y) \leftrightarrow C(x,y)=1$

Vi viser at hvis $S=<I,R,<N(R,w),\sigma'(w),p'(w)>/w\hat{e}I/, C'>$ er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom vil en slik struktur bare oppfylle dette kravet hvis og bare hvis man har for alle $w\hat{e}I$ at $Pt(N(R,w))$ Inkl $\sigma(w)$ og man dessuten har for alle $w\hat{e}I$ at dersom x er en ikke-tom delmengde av $N(R,w)$ så har man at $p(w)>0$. Dette er to meget sterke og formodentlig temmelig urealistisk krav.

I §19 studerer vi fra en rent mengdeteoretisk synsvinkel en type relative sannsynlighetsfunksjoner over en mengde X som oppfyller kravene C3 - C10 og viser at vi også om disse kan vise visse resultater som er analoge med hovedresultatene i §18.

§15 Boolske algebraer og sannsynlighetsrom

Vi skal i dette avsnittet definere en del begreper av ren mengdeteoretisk og matematisk natur. Først definerer vi hva som menes med at σ er en naturlig boolsk algebra over mengden X. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 15.1: σ er en naturlig boolsk algebra over X hvis og bare hvis

(i) X er en mengde
(ii) $\emptyset\hat{e}\sigma$ & $X\hat{e}\sigma$ & σ Inkl $Pt(X)$
(iii) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}\sigma \rightarrow xUy\hat{e}\sigma$
(iv) $(Ax)(x\hat{e}\sigma \rightarrow (X-x)\hat{e}\sigma$

Man ser fra denne definisjonen at dersom σ er en naturlig boolsk algebra over X så er σ en mengde av delmengder av X som inkluderer nullmengden og X selv, og som dessuten er lukket under endelig union og komplement med hensyn på X. Er X den tomme mengden, har man med andre ord at $X=\emptyset$, ser man fra definisjonen at det finnes en og bare en naturlig boolsk algebra over X og at denne er $\{\emptyset\}$.

Det neste begrepet vi trenger er begrepet sannsynlighetsrom.

Definisjon 15.2: Et triple $<X,\sigma,p>$ kalles for et sannsynlighetsrom over X hvis og bare hvis man har at:

(i) X er en ikke-tom mengde
(ii) σ er en naturlig boolsk algebra over X
(iii) p er en funksjon som oppfyller følgende krav:
  (a) $p: \sigma \rightarrow [0,1]$
  (b) $p(\emptyset)=0$ & $p(X)=1$
  (c) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}\ \sigma$ & $x\Omega y=\emptyset \rightarrow p(xUy)=p(x)+p(y))$

Er $<X,\sigma,p>$ et sannsynlighetsrom over X er p en endelig additiv sannsynlighetsfunksjon over den naturlige boolske algebraen σ. I definisjonen representerer (a) - (c) de vanlige Kolmogorov-aksiomene for endelig additive sannsynlighetsfunksjoner.

I forbindelse med sannsynlighetsrom S er det også svært naturlig å definere hva som menes med den relative sannsynlighetsfunksjonen som er assosiert med S. Vi skal i denne forbindelse benytte den følgende definisjon:

© Morten Harboe Rognes 2013

Definisjon 15.3: Anta <X,σ,p> er et sannsynlighetsrom. Da er den relative sannsynlighetsfunksjonen P assosiert med <X,σ,p> definert slik:

P= Mg(<<x,y>,z>: zêReell& x,yêσ & p(y)>0 & z=(p(xΩy)/p(y))

I definisjonene ovenfor kan X være en hvilken som helst mengde. Det behøver ikke å dreie seg om for eksempel en mengde av mulige verdener. X kan være en mengde av reelle tall, en mengde av vektorer eller hva som helst annet man kan komme på. Dessuten kan mengden være endelig eller uendelig.

I det følgende tenker vi oss at vi har for oss et sannsynlighetsrom S=<X,σ,p> der elementene i σ representerer de utsagn vi er interessert i å betrakte og X er en mengde med mulige verdener og at den relative sannsynlighetsfunksjonen C assosiert med S er slik at C(x,y) representerer den grad av troverdighet som bør tilskrives utsagnet representert ved x relativt til det utsagnet som er representert ved y.

Teorem 15.1: Anta <X,σ,p> er et sannsynlighetsrom over X der X Inkl I. Definer Q;1 og Q;2 ved henholdvis:

(i) Q;1 = Mg(y: yêPt(I) & yΩX êσ)

(ii) Q;2 = Mg(y: yêσ & p(y)≠0)

Definer C ved: C= Mg(<<x,y>, p(XΩxΩy)/p(y)> : xêQ;1 og yêQ;2)

Da har vi at følgende påstander holder:

(a) Func(C) & Rgn(C) Inkl [0,1]

(b) Dom(C) = Q;1xQ;2

(c) <x,y>êDom(C) → <I-x,y>êDom(C)

(d) <x1,y>êDom(C) &<x2,y>êDom(C) → <x1Ux2,y>êDom(C)

(e) <x,y>êDom(C) → <y,y>êDom(C)

(f) <x,y>êDom(C) → C(y,y)=1

(g) <x1,y><x2,y>êDom(C) & x1Ωx2=ø → C(x1Ux2,y) = C(x1,y)+C(x2,y)

(h) <x,y>êDom(C) → C(xΩy,y) = C(x,y)

(i) <x,y>êDom(C) & C(x,y)>0 → <x,xΩy>êDom(C)

(j) <x1,y>,<x2,y>êDom(C) & C(x2,y)>0 → C(x1Ωx2,y) = C(x1,yΩx2)* C(x2,y)

Bevis: *Ad(a)*: Det er nødvendig å vise at C er en funksjon. Anta derfor for vilkårlige x,y z at <x,z>,<x,y>êC Det følger da ved hjelp av definisjonen av C at det må finnes x1, x2 slik at

(1) x= <x1,x2>

(2) z=p(XΩx1Ωx2)/p(x2) & y=p(XΩx1Ωx2)/p(x2)

(3) x1êQ;1 & x2êQ;2

Men fra (2) følger umiddelbart at z=y. Dette viser at C er en funksjon. Anta for vilkårlig x at xêRgn(C). Da må det finnes y slik at <y,x>êC. Fra dette og definisjonen av C følger at det finnes <y,z> der yêQ;1 & zêQ;2 og x=p(XΩyΩz)/p(z) Siden p er en sannsynlighetsfunksjon over σ og z, XΩyΩz êσ har vi at p(z)>0 & p(XΩyΩz)ê[0,1]. Det følger at xê[0,1]. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): Anta xêQ;1 og yêQ;2. Da har man xêPt(I) & xΩX êσ. Dessuten følger det at yêσ & p(y)≠0. Det følger siden σ er en naturlig boolsk algebra at xΩyΩXêσ og derfor at p(xΩyΩX)>=0. Sett per definisjon c=p(xΩyΩX)/p(y). Da har vi <<x,y>,c>êC. Dette impliserer at <x,y>êDom(C). Dette viser at inklusjonen mot venstre i punkt (b) holder. Inklusjonen den andre veien følger lett ved hjelp av definisjonen av C.

© Morten Harboe Rognes 2013

Ad (c): Anta (1) <x,y>êDom(C). Da følger ved hjelp av definisjonen av C at xΩXêσ & xêPt(I). Vi har da siden σ er en naturlig boolsk algebra over X at (2) (X-(xΩX))êσ. Nå har man at (3) X-(xΩX) = (I-x)ΩX. For er w vilkårlig og wê(X-(xΩX)) følger wêX og ¬(wêx &wêX). Herav har vi ¬(wêx) og siden wêX og X Inkl I har vi da wê(I-x)ΩX. Dette viser inklusjonen mot høyre i (3). Er på den annen side w vilkårlig og wê(I-x)ΩX følger wêI & ¬(wêx) & wêX. Da har vi åpenbart wêX & ¬(wêxΩX). Det følger at wê(X-(xΩX). Dette viser at (3) holder. Fra (2) og (23) følger (I-x)ΩXêσ, og siden (I-x)êPt(I) har vi (I-x)êQ;1. Fra (1) og definisjonen av C følger yêQ;2. Vi har derfor <I-x,y>êQ;1xQ;2. Fra dette og punkt (b) følger <I-x,y>êDom(C)

Ad (d): Anta <x1,y>êC & <x2,y>êC. Ved hjelp av definisjonen av C følger da (1) x1,x2êQ;1 & yêQ;2. Fra dette følger x1ΩXêσ & x2ΩXêσ. Siden σ er en naturlig Boolsk algebra over X har vi da at (x1ΩX)U(x2ΩX)=(x1Ux2)ΩXêσ. Videre må vi ha siden x1,x2êPt(I) at x1Ux2êPt(I). Det følger at x1Ux2êQ;1. Fra dette, (1) og punkt (b) kan man slutte at <x1Ux2,y>êC.

Ad (e): Anta <x,y>êC. Da følger ved hjelp av punkt (b) at xêQ;1&yêQ;2. Sideen yêQ;2 har vi (1) yêσ & p(y)>0. Siden σ er en naturlig boolsk algebra over X har vi (2) σ Inkl Pt(X) Inkl Pt(I). Siden Xêσ følger ved hjelp av (1) at yΩXêσ. Ved hjelp av (1) og (2) utleder vi også yêPt(I). Det følger at yΩXêσ & yêPt(I) og derfor at yêQ;1. Siden yêQ2 har vi da ved hjelp av punkt (b) at <y,y>êDom(C).

Ad (f): Anta <x,y>êC. Da har man (1) xêQ;1 & yêQ;2. Fra den siste konjunkten følger (2) p(y)≠0 & yêσ. Siden yêσ Inkl Pt(X) følger y Inkl X Inkl I og derfor (3) yΩX=y. Det følger at (4) yΩXêσ & yêPt(I) og videre at (5) p(XΩyΩy)=p(y). Vi må vise at C(y,y)=1. Etter definisjonen av C innebærer at det vil være tilstrekkelig å vise at p(XΩyΩy)/p(y)=1 & yêQ;1&yêQ;2. Den første konjunkten følger fra (2) og (5). Fra (4) og (1) følger også yêQ;1. Dette viser at punkt (f) holder.

Ad (g): Anta (1) <x1,y>,<x2,y>êDom(C) & x1Ωx2=ø. Da har man (2) x1,x2êQ;1 & yêQ;2. Fra dette følger at (3) x1,x2êPt(I) & x1ΩX, x2ΩXêσ og (4) yeσ & p(y)≠ø. Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av C at

(5.1) C(x1,y) = p(XΩx1Ωy)/p(y)

(5.2) C(x2,y) = p(XΩx2Ωy)/p(y)

Fra (3) følger siden σ er en naturlig boolsk algebra at (6) x1Ux2 êPt(I) & (x1Ux2)ΩXêσ. Dette impliserer at (7) x1Ux2êQ;1. Fra dette, (2) og definisjonen av C følger

(8) C(x1Ux2,y)= p(XΩ(x1Ux2)Ωy)/p(y)

Nå har man siden <X,σ,p> er et sannsylighetsrom over X at

(9) p(XΩ(x1Ux2)Ωy) = p(XΩx1Ωy) + p(XΩx2Ωy)

fordi det følger fra (1) at (XΩx1Ωy)Ω (XΩx2Ωy)=ø og det følger fra (3) og (4) at XΩx1Ωy og XΩx2Ωy er elementer i σ. Fra (5.1), (5.2), (8) og (9) følger:

C(x1Ux2,y) = C(x1,y)+ C(x2,y)

Ad (h): Anta (1) <x,y>êDom(C). Da følger (2) xêQ;1 & yêQ;2. Herav følger så ved hjelp av definisjonene av Q;1 og Q;2 at (3) xêPt(I) & xΩXêσ & yêσ & p(y)≠0. Fra dettee følger åpenbart at (4) xΩyΩXêσ & xΩyêPt(I). Vi har derfor (5) xΩyêQ;1. Fra (2), (3) og definisjonen av C følger at

(6) C(x,y) = p(XΩxΩy)/p(y)

(7) C(xΩy,y) = p(XΩ(xΩy)Ωy)/p(y)

Men det er åpenbart at XΩxΩy= XΩ(xΩy)Ωy. Fra dette, (6) og (7) følger C(xΩy,y) = C(x,y). Dette viser at punkt (h) holder.

© Morten Harboe Rognes 2013

Ad (i): Anta (1) <x,y>êDom(C) og (2) C(x,y)>0. Fra (1) følger:
(3) xêQ;1 & yêQ;2. Dette i sin tur innebærer at (4) xêPt(I) & xΩXêσ. Dessuten følger fra den siste konjunkten i (3) at (5) yêσ & p(y)≠0. Fra (3) og definisjonen av C følger:

(6) C(x,y) = p(XΩxΩy)/p(y). Fra dette og (2) kan man slutte:

(7) p(XΩxΩy)/p(y) >0 Fra dette følger åpenbart siden p(y)≠0 at
(8) p(XΩxΩy) ≠ø. Fra (5) har vi (9) yêσ Inkl Pt(X). Fra (4) og (5) følger, siden σ er en naturlig boolsk algebra, at (10) xΩXΩyêσ. Fra (9) følger y Inkl X. Det følger da at xΩy Inkl y Inkl X og derfor at (11) xΩyΩX= xΩy. Fra dette og (10) følger (12) xΩyêσ Fra (11) og (8) følger også p(xΩy)>0. Vi har derfor xΩyêQ;2. Fra dette, (3) og punkt (b) følger <x,xΩy>êDom(C). Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (j): Anta (1) <x1,y>,<x2,y>êDom(C) og dessuten at (2) C(x2,y)>0. Fra (1) og punkt (b) kan vi da slutte at (3) x1,x2, x1Ωx2 êQ1 & yêQ;2. Fra (1) og (2) kan vi dssuten ved hjelp av punkt (i) slutte at (4) x2ΩyêQ;2. Dessuten følger at (5) p(x2Ωy)>0.

Fra (3) og (4) og definisjonen av C følger nå:

(6) C(x1Ωx2,y) = p(XΩ(x1Ωx2)Ωy)/p(y)

(7) C(x1,yΩx2)= p(XΩx1Ω(yΩx2))/ p(yΩx2)

(8) C(x2,y) = p(XΩx2Ωy)/p(y)

Siden x2Ωy êQ;2 ifølge (4) har vi at x2Ωyêσ Inkl Pt(X). Da følger x2Ωy Inkl X og derfor at (9) x2ΩyΩX =x2Ωy. Fra (5) - (9) følger C(x1Ωx2,y) = C(x1,yΩx2)*C(x2,y). Dette viser at punkt (h) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§16 En teori om rasjonell grad av troverdighet

Som man husker er L;e språket til mengdelæren, det vil si det mengdeteoretiske systemet ZFC;u. Utvides vokabularet i L;e med predikatene i mengden Δ får vi språket til egenskapsteorien E;3. I akkurat denne paragrafen skal vi ta vårt utgangspunkt i språket L;e(Δ;2) der Δ;2, slik som forklart i §2, er predikatmengden Δ utvidet med predikatet "z er den grad av rasjonell troverdighet som bør tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y". Dette predikatet forkorter vi, noe som allerede har blitt nevnt, med "Cd(z,x,y)".

Innenfor rammen av språket L;e(Δ;2) vil vi nå formulere en teori om rasjonell troverdighetsgrad. Denne teorien er en utvidelse av E;3 med språket utvidet til L;e(Δ;2). Dette innebærer at teorien er en utvidelse av ZFC;u(L;e(Δ;2))[θ;0]. Den nye teorien skal vi betegne med "C;1".

Vi skal først spesifisere de nye ikke-logiske aksiomene i denne teorien. Dernest vil vi gi en presis definisjon av den.

Den første grunnsetningen i teorien er nærmest trivielt. Det sier at dersom z er den grad av rasjonell troverighet som bør tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y så er x og y utsagn og z et reellt tall i intervallet [0,1]. Dette aksiomet kan formuleres slik:

C1 Cd(z,x,y) → x,yêU & zê[0,1]

Den neste grunnsetningen sier at dersom x og y er utsagn og x har en eller annen grad av rasjonell troverdighet relativt til y så finnes det ett og bare ett reellt tall i intervallet [0,1] som

© Morten Harboe Rognes 2013

representerer denne graden av rasjonell troverdighet. Denne grunnsetningen kan formuleres slik i L;e(Δ;2):

C2 $(Ez)Cd(z,x,y) \rightarrow (E!z)Cd(z,x,y)$.

Før vi formulerer de resterende grunnsetningene i teorien definerer vi funksjonen C på følgende måte:

Definisjon 16.1: $C = Mg(\langle\langle x,y\rangle z\rangle: Cd(z,x,y))$

I lys av grunnsetningene C1 og C2 ser man ganske lett at domenet til denne funksjonen er inkludert i UxU og at verdiområdet er intervallet [0,1].

Er y et utsagn skal vi kalle mengden av alle de utsagn x som er i besittelse av en eller annen grad av rasjonell troverdighet relativt til y for utfallsrommet til y. De følgende grunnsetninger sier at dersom x og z er to utsagn som er med i utfallsrommet til et utsagn y så er også negasjonen av x, disjunksjonen av x og z samt y selv med i utfallsrommet til y:

C3 $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow \langle Neg(x),y\rangle \hat{e} C$
C4 $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \,\&\, \langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow \langle D(x,z),y\rangle \hat{e} Dom(C)$
C5 $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow \langle y,y\rangle \hat{e} Dom(C)$

Fra disse aksiomene fremgår det at mengden av alle sannhetsmengdene til utsagnene i utfallsrommet til et utsagn y er lukket under alle endelige boolske mengdeoperasjoner og at den inkluderer nullmengden og sannhetsmengden til y selv. Dette innebærer at denne mengden representerer det vi i forrige paragraf omtalte som en naturlig, endelig-additiv boolsk algebra.

De neste to aksiomene påstår i det vesentlige at det finnes et endelig-additivt sannsynlighetsmål over utfallsrommet til et utsagn y.

C6 $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow C(y,y)=1$
C7 $\langle x1,y\rangle,\langle x2,y\rangle \hat{e} Dom(C) \,\&\, \mu(x1)\Omega\mu(x2)=\emptyset \rightarrow C(D(x1,x2),y)= C(x1,y)+C(x2,y)$

Den neste grunnsetningen sier at dersom utsagnet x har en rasjonell troverdighetsgrad relativt til utsagnet y så er den rasjonelle grad av troverdighet til konjunksjonen av utsagnene x og y identisk med den rasjonelle grad av rasjonell troverdighet til utsagnet x relativt til y.

C8 $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow C(K(x,y),y) = C(x,y)$

Den neste grunnsetningen uttrykker at dersom utsagnet x har en rasjonell troverdighetsgrad relativt til utsagnet y, og denne er større en null, så er også utsagnet x i besittelse av en grad av rasjonell troverdighet relativt til konjunksjonen av x og y:

C9 $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \,\&\, C(x,y)>0 \rightarrow \langle x, K(x,y)\rangle \hat{e} Dom(C)$

Det siste aksiomet sier at dersom utsagnene x1 og x2 har en rasjonell grad av troverdighet relativt til y og den rasjonelle grad av troverdighet til x2 relativt til y er større enn null, så har

© Morten Harboe Rognes 2013

man at troverdighetsgraden til konjunksjonen av x1 og x2 relativt til y er identisk med troverdighetsgraden til x2 relativt til y multiplisert med troverdighetsgraden til x1 relativt til konjunksjonen av x2 og y. Formulert i symboler:

C10 $\langle x1,y\rangle,\langle x2,y\rangle \hat{e} Dom(C) \,\&\, C(x2,y)>0 \rightarrow$
$C(K(x1,x2),y) = C(x1, K(y,x2))^* C(x2,y)$

Dermed har vi gitt en fullstendig oversikt over de aksiomene om troverdighetsgrad som inngår i teorien C;1. Vi kan nå også definere denne teorien presist. C;1 er den teorien vi får når ZFC;u(L;e(Δ;2))[θ;0] utvides med C1 - C10 som nye ikke-logiske aksiomer. Med andre ord har man:

$C;1 = ZFC;u(L;e(\Delta;2))[\theta;0 \cup \{C1,...,C10\}]$

Når det gjelder aksiomene C3- C10 ser man lett at disse er helt analoge med påstandene (c)-(j) i Teorem 15.1. Aksiomene C1 og C2 svarer i en viss forstand til de to første punktene i dette teoremet, men ikke helt. Teorem 15.1 viser imidlertid hvordan man forholdsvis lett kan konstruere modeller for C;1 innenfor rammen av vår egenskapsteori E;3. Definerer man et konkret sannsynlighetsrom $\langle X,\sigma,p\rangle$, der X Inkl I, i denne teorien, definerer Q;1,Q;2 og C som i Teorem 15.1 og endelig definerer predikatet Cd ved å sette:

$Cd(z,x,y) \leftrightarrow \langle\langle x,y\rangle,z\rangle \hat{e} C$

kan man utlede alle grunnseetningene i C;1. Dette er selvfølgelig grunnen til at vi har presentert Teorem 15.1 og gitt et detaljert bevis for det før vi formulerte teorien C;1. Disse betraktningene viser også at C;1 er konsistent om E;3 er konsistent. Selvom dette resultat er beskjedent er det intet galt i å nevne det.

La oss også nevne at teorien C1 i en viss forstand er meget svak. Studerer man aksiomene C1 - C10 nærmere ser man at de alle er forenelige med den påstand at det ikke finnes x,y og z slik at Cd(z,x,y). Faktisk er det lett å vise at C1 - C10 følger fra

(1) $\neg(Ez)(Ex)(Ey)(Cd(z,x,y))$

Man ser lett at C1 og C2 følger fra (1). Når det gjelder aksiomene C3- C10 er alle disse setningene kondisjonalsetninger der en setning av formen $\langle x,y\rangle \hat{e} C$ er med i antesedenten. Dette innebærer at de alle kan skrives på formen: $(Ax)(Ay)(\langle x,y\rangle \hat{e} C \rightarrow \beta)$. Men siden $\langle x,y\rangle \hat{e} C$ er ekvivalent med (Ez)Cd(z,xy) kan alle aksiomene bringes på formen: $(Ax)(Ay)((Ez)Cd(z,x,y) \rightarrow \beta)$. Men enhver slik setning er en rent predikatlogisk konsekvens av (1). I denne forbindelse kan det også nevnes at dersom man konsistent kan utvide E;3 med (1) som et nytt ikke-logisk aksiom kan man heller ikke det å legge til C1 - C10 som nye ikke-logiske aksiomer lede til noen motsigelser.

Vi har så langt bare knyttet teorien C;1 til teorien om ikke-addive naturlige boolske algebraer og teorien om sannsynlighetsrom. Så langt har vi ikke forbundet denne teorien med de teoriene om hva man bør akseptere som ble formulert og undersøkt i Del I. Hvordan dette kan gjøres og hvilke alternativer som står åpne vil bli drøftet senere. Vi er av den mening at dette bare kan gjøres på en fruktbar måte dersom man først studerer nærmere visse forhold mellom preferanserelasjoner og relative sannsynlighetsfunksjoner. Vi vil ta opp dette temaet i den neste paragrafen.

© Morten Harboe Rognes 2013

§17 Preferanserelasjoner og sannsynlighetsrom

La oss for oversiktlighetens skyld repetere endel av de definisjonene vi tidligere har gitt i forbindelse med preferanserelasjoner. Aller først minner vi om at en preferanserelasjon R over mengden av mulige verdener I er en relasjon R Inkl IxI som oppfyller de følgende krav: (i) den skal være total, med andre ord har man (Ax)(Ay)(x,yêI → (xRy v yRx)) (ii) Er transitiv, dette innebærer at (Ax)(Ay)(Az)(xRy & yRz → xRz).Er α en mengde med mulige verdener, ie. α Inkl I, defineres "Max(R,α)" ved Max(R,α) =Mg(x: xêα & (Ay)(yêα →xRy)). Er R en preferanserelasjon defineres "L(R)" ved xL(R)y ↔ (xRy&yRx). Uttrykket "R*" er definert ved xR*y ↔ (xRy & ¬(yRx)). Tilslutt defineres R-nivået bestemt av x, i symboler "N(R,x)", ved N(R,x) = Mg(y:yêI & yL(R)x). Tidligere har vi brukt notasjonen "[x];R" istedet for "N(R,x)". Men de to uttrykkene betegner nøyaktig det samme.

Før vi går videre nevner vi den følgende hjelpesetning:

Lemma 17.1: Anta R er en preferanserelasjon over I og at α,β Inkl I. Anta w,w' er elementer i I. Da har man at følgende holder:

(a) L(R) er en ekvivalensrelasjon over I
(b) UN/wêI/(N(R,w)) = I
(c) (w L(R) w' ↔ N(R,w) = N(R,w'))
(d) N(R,w)≠N(R,w') → N(R,w)Ω N(R,w')=ø
(e) wêMax(R,α) → Max(R,α)= αΩN(R,w)
(f) w,w' êMax(R,α) → wL(R)w'
(g) wL(R)w' & wêMax(R,β) & w'êMax(R,α) → Max(R,β)UMax(R,β) Inkl N(R,w)
(h) Max(R,α)ΩN(R,w) ≠ø → Max(R,α) Inkl N(R,w)

Siden det er ganske lett å gi bevis for de enkelte punktene i denne satsen utelater vi et detaljert bevis. Dette kan sikkert overlates til leseren.

Vi kommer nå til vårt hovedteorem i dette avsnittet. Teoremet er det følgende:

Teorem 17.1: Anta (i) R er en preferanserelasjon over I. Anta (ii) at for alle wêI er <N(R,w), σ(w),p(w)> et sannsynlighetsrom over N(R,w). Anta (iii) at for alle w,w'êI der vi har wL(R)w' har man σ(w)=σ(w') og p(w)=p(w'). Anta tilslutt (iv) at C er definert slik:

C= Mg(<<x,y>,a>: x,yêU & aêReell & (Ew)[wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w) & μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0 & a= p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))])

Gitt disse forutsetningene har man at

(a) C er en funksjon hvor Dom(C) Inkl UxU & Rgn(C) Inkl [0,1]
(b) C oppfyller kravene C3 - C10 nevnt i §16

Bevis: For å lette lesbarheten til våre formler skal vi bare skrive "N(w)" istedet for "N(R,w)" siden preferansserelasjonen R er den samme i hele beviset. Anta forutsetningene i satsen holder.

(A) Vi viser først at C er en funksjon. Anta derfor (1) <<x,y>,a>êC & <<x,y>,b>êC

© Morten Harboe Rognes 2013

Vi skal vise at a=b. Fra (1) og definisjonen av C kan man slutte at det finnes w1,w2êI slik at

(2.1) w1êMax(R,μ(y)) & xΩN(R,w1)êσ(w1)
& yΩN(R,w1)êσ(w1) & p(w1)(yΩN(R,w1))≠0 &
a= p(w1)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w1))/p(w1)(μ(y)ΩN(R,w1))

og (2.2) w2êMax(R,μ(y)) & xΩN(R,w2)êσ(w2)
& yΩN(R,w2)êσ(w2) & p(w2)(yΩN(R,w2))≠0 &
b= p(w2)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w2))/p(w2)(μ(y)ΩN(R,w2))

Fra (2.1) g (2.2) følger at w1êMax(R,μ(y)) & w2êMax(R,μ(y)). Dette og punkt (f) og (c) i Lemma 17.1 impliserer at (3) N(R,w1) = N(R,w2). Dette i sin tur impliserer w1L(R) w2. Fra dette og den tredje forutsetningen i satsen kan vi også slutte at (4) p(w1)=p(w2). Fra (2.1), (2.2), (3) og (4) følger a=b. Dette viser at C er en funksjon.

(B) Vi må også vise at Dom(C) Inkl UxU og at Rgn(C) Inkl [0,1] Det følger fra definisjonen av C at:

(+) <<x,y>,a>êC ↔. x,yêU & aêReell & (Ew)[wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0 &
a= p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))]

Fra dette følger at dersom<x,y>êDom(C) har man at det finnes a slik at <<x,y>,a>êC. Fra dette og (+) følger x,yêU og derfor <x,y> Inkl UxU. Dette viser at Dom(C) Inkl UxU
Anta aêRgn(C). Fra definisjonen av Rgn følger da <<x,y>,a>êC og derfor ved hjelp av (+) at det finnes w êI slik at

(1) x,yêU & aêReell & wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0 &
a= p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))

Siden <N(w),σ(w),p(w)> er et sannsynlighetsrom har man at

(2) p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))ê[0,1] & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))ê[0,1] Fra dette og det at p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0 som følger fra (1) har vi at 1>= a>=0, med andre ord at aê[0,1]. Dette viser at Rgn(C) Inkl [0,1]. Fra (+) følger:

(++) <x,y>êDom(C) ↔ (Ea)(<<x,y>,a>) ↔
x,yêU & (Ew)[wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0]

Vi har nå vist at punkt (a) i teoremet holder. Vi skal nå vise at punkt (b) holder, med andre at C oppfyller kravene C3 - C10 nevnt i §16.

(C) Først viser vi (1) <x,y>êDom(C)→ <Neg(x),y>êC.
Anta (2) <x,y>êC. Fra dette og (++) følger eksistensen av w slik at slik at

(3.1) wêMax(R,μ(y))
(3.2) μ(x)ΩN(R,w)êσ(w)
(3.3) μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0

Fra (3.1) - (3.3) og (++) fremgår det at det vil være tilstrekkelig å vise at
μ(Neg(x))ΩN(w)êσ(w). Siden vi fra (3.2) har at μ(x)ΩN(w)êσ(w) og σ(w) er en naturlig boolsk algebra over N(w) har vi (4) N(w)-μ(x)ΩN(w)êσ(w). Men da μ(Neg(x))ΩN(w) = (I- μ(x))Ω N(w) =N(w)- μ(x)ΩN(w) siden N(w) Inkl I
Fra dette og (4) følger μ(Neg(x))ΩN(w)êσ(w) som er det vi ønsker. Dette viser at funksjonen C oppfyller kravet C3.

(D). Vi må vise at C oppfyller kravet C4 i §16. Anta derfor

© Morten Harboe Rognes 2013

(1) <x1,y>, <x2,y>êDom(C). Da har man ved hjelp av (++) at det finnes w1,w2êI der

(2.1) w1êMax(R,μ(y)) & μ(x1)ΩN(R,w1)êσ(w1)
& μ(y)ΩN(R,w1)êσ(w1) & p(w1)(μ(y)ΩN(R,w1))≠0 og

(2.2) w2êMax(R,μ(y)) & μ(x2)ΩN(R,w2)êσ(w2)
& μ(y)ΩN(R,w2)êσ(w2) & p(w2)(μ(y)ΩN(R,w2))≠0

Siden w1,w2êMax(R,μ(y)) følger ved hjelp av Lemma 17.1 w1 L(R) w2. Fra dette, Lemma 17.1 og den tredje forutsetningen i Teorem 17.1 følger:

(3) N(R,w1) = N(R,w2) & σ(w1) = σ(w2) & p(w1) = p(w2)

Fra dette (2.1) og (2.2) følger: μ(x1)ΩN(R,w1)êσ(w1) & μ(x2)ΩN(R,w1)êσ(w1). Siden σ(w1) er en naturlig boolsk algebra over N(w1) følger at

μ(x1)ΩN(w1) U μ(x2)ΩN(w1) êσ(w1) Fra dette kan man så slutte at

μ(D(x1,x2))ΩN(w1)êσ(w1). Men fra dette, (2.1) og (++) følger <D(x1,x2),y>êDom(C). Dette viser at C oppfyller kravet C4 i §16.

(E) Vi ønsker å vise (1) <x,y>êDom(C) → <y,y>êDom(C). Anta (2) <x,y>êDom(C). Da følger ved hjelp av (++) at det finnes wêI slik at

(3) wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0

Fra dette følger umiddelbart

(4) wêMax(R,μ(y)) & μ(y)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0

Siden x,yêU følger fra dette og (++) at <y,y>êDom(C). Dette viser at (1) holder og at C derfor oppfyller kravet C5 i §16.

(F) Det må godtgjøres at (1) <x,y>êDom(C) → C(y,y)=1. Anta (2) <x,y>êDom(C). Da følger ved hjelp av (++) at det finnes wêI slik at

(3) x,yêU & wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0

Fra dette følger umiddelbart

(4) wêMax(R,μ(y)) & μ(y)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0
& 1= p(w)(μ(y)Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))

Siden yêU følger ra dette og (+) at C(y,y)=1. Dette viser at (1) holder og at derfor at C oppfyller kravet C6 i §16.

(G) Vi skal nå vise at

(1) <x1,y>,<x2,y>êDom(C) & μ(x1)Ω μ(x2)=ø →
C(D(x1,x2),y) = C(x1,y) + C(x2,y)

Anta derfor (2) <x1,y>,<x2,y>êDom(C) & μ(x1)Ω μ(x2)=ø. Fra dette og (+) følger eksistensen av w1,w2êI og a,bêReell slik at:

(3.1) x1,x2,yêU & w1êMax(R,μ(y)) & μ(x1)ΩN(R,w1)êσ(w1)
& μ(y)ΩN(R,w1)êσ(w1) & p(w1)(μ(y)ΩN(R,w1))≠0 &
a= p(w1)(μ(x1)Ωμ(y)ΩN(R,w1))/p(w1)(μ(y)ΩN(R,w1))

(3.2) w2êMax(R,μ(y)) & μ(x2)ΩN(R,w2)êσ(w2)
& μ(y)ΩN(R,w2)êσ(w2) & p(w2)(μ(y)ΩN(R,w2))≠0 &
b= p(w2)(μ(x2)Ωμ(y)ΩN(R,w2))/p(w2)(μ(y)ΩN(R,w2))

© Morten Harboe Rognes 2013

Siden w1,w2êMax(R,y) kan man ved hjelp av Lemma 17.1 og forutsetning (iii) I Teorem 17.1 slutte at w1 L(R) w2 og derfor (4) N(w1)=N(w2) & σ(w1)=σ(w2) & p(w1)=p(w2). På samme måte som vi viste under (D) ovenfor kan man fra (3.1), (3.2) og (4) slutte at

(5) μ(D(x1,x2))ΩN(w1)êσ(w1). Videre har vi siden <N(w1),σ(w1),p(w1)> er et endelig-additivt sannsynlighetsrom at

p(w1)(μ(D(x1,x2))Ωμ(y)ΩN(w1)) =
p(w1)(μ(x1)Ωμ(y)ΩN(w1)) + p(w1)(μ(x1)Ωμ(y)ΩN(w1))

Fra dette følger ved hjelp av (3.1), (3.2) at

(6) p(w1)(μ(D(x1,x2))Ωμ(y)ΩN(w1))/ p(w1)(μ(y)ΩN(w1)) = a+b

Fra (3.1), (3.2), (5) og (6) følger C(D(x1,x2),y) = C(x1,y) + C(x2,y). Dette viser at (1) holder og derfor at C oppfyller kravet C7 i §16.

(H) Vi må vise: (1) <x,y>êDom(C) → C(K(x,y),y) = C(x,y)

Anta derfor <x,y>êDom(C). Da må det finnes noe a slik at <<x,y>,a>êC. Fra dette og (+) følger at det finnes wêI slik at:

(2) x,yêU & aêReell & wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0 &
a= p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))

Siden σ(w) er en naturlig boolsk algebra over N(w) har vi at

μ(x)Ωμ(y)ΩΩN(w) = μ(K(x,y))Ωμ(y)ΩN(w)êσ(w).

Vi har derfor at a= p(w)(μ(K(x,y))Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))

Fra dette, (2) og (+) kan man slutte C(x,y) = a og C(K(x,y),y)=a. Det følger selvfølgelig at C(K(x,y),y) = C(x,y). Dette viser at C oppfyller kravet C8 i §16.

(I) Det er nødvendig å vise:

(1) <x,y>êDom(C) & C(x,y)>0 →<x,K(x,y)>êDom(C)

Anta derfor (2) <x,y>êDom(C) & C(x,y)>0. Fra den første konjunkten og (+) følger det at det finne wêI og a slik at

(3) x,yêU & aêReell & wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0 &
a= p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))

Fra den andre konjunkten i (2) og (3) følger (4) a>0. Fra dette og (3) følger videre: (5) p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w)) ≠0. Fra (3) følger også (μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))êσ(w). Fra dette siste, (5), (3) og (++) kan man så slutte at <x, K(x,y)>ê Dom(C). Dette viser at C oppfyller kravet C9 i §16.

(J) Det gjenstår helt tilslutt å gi bevis for at

<x1,y><x2,y>êDom(C) & C(x2,y) >0 →
C(K(x1,x2),y) = C(x1, K(x2,y))* C(x2,y)

Anta derfor (1) <x1,y><x2,y>êDom(C) & C(x2,y) >0. Fra dette og (+) kan man slutte at det finnes w1,w2êI og a,b slik at:

(2.1) x1,x2,yêU & w1êMax(R,μ(y)) & μ(x1)ΩN(R,w1)êσ(w1)
& μ(y)ΩN(R,w1)êσ(w1) & p(w1)(μ(y)ΩN(R,w1))≠0 &
a= p(w1)(μ(x1)Ωμ(y)ΩN(R,w1))/p(w1)(μ(y)ΩN(R,w1))

(2.2) w2êMax(R,μ(y)) & μ(x2)ΩN(R,w2)êσ(w2)
& μ(y)ΩN(R,w2)êσ(w2) & p(w2)(μ(y)ΩN(R,w2))≠0 &
b= p(w2)(μ(x2)Ωμ(y)ΩN(R,w2))/p(w2)(μ(y)ΩN(R,w2)) >0

© Morten Harboe Rognes 2013

Den siste konjunkten i (2.2) følger fra det at C(x2,y)>0.

Fra (2.1) og (2.2) følger w1,w2êMax(R,μ(y)). Dette impliserer w1 L(R) w2 og derfor ved hjelp av Lemma 17.1 og forutsetning (iii) i Teorem 17.1 at

(3) N(R,w1) = N(R,w2) & σ(w1)=σ(w2) & p(w1 =p(w2)

Fra (2.1), (2.2) og (3) følger: (4) (μ(K(x1,x2))Ωμ(y)ΩN(w1))êσ(w1) Siden vi ifølge (2.1) har p(w1)(μ(y)ΩN(w1) ≠0 følger det at det må finnes c1êReell slik at

(4) p(w1)(μ(K(x1,x2))Ωμ(y)ΩN(w1))/p(w1)(μ(y)ΩN(w1) =c1

Fra dette, (4), (2.1), (2.2) og (3) følger også (5) C(K(x1,x2),y)=c1

Fra (2.2) og (3) følger (6) p(w)(μ(x2)Ωμ(y)ΩN(R,w1)) >0

Fra dette (4), (2.2) og (3) kan man slutte at det må finne c2 slik at

(7) p(w1)(μ(K(x1,x2))Ωμ(y)ΩN(w1))/p(w)(μ(x2)Ωμ(y)ΩN(R,w1)) =c2

Fra dette, (4), (2.1), (2.2) og (3) følger også (8) C(x1,yΩx2) =c2

Fra (2.2) og (3) har vi

(9) p(w2)(μ(x2)Ωμ(y)ΩN(R,w2))/p(w2)(μ(y)ΩN(R,w2))=b

Vi kan også fra (2.2) slutte at (10) C(x2,y)=b. Fra (4),(7) og (8) følger c1=c2*b. Fra dette, (5), (8) og (10) følger det vi ønsker: C(K(x1,x2),y) = C(x1, K(x2,y))* C(x2,y). Dette viser at C også oppfyller kravet C10 i §16.

Vi har nå vist at C oppfyller kravene C3 - C10 i tillegg til å være en funksjon inn i [0,1] og der domenet er inkludert i UxU. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 17.1. **QED**.

Vi skal innføre en type strukturer som vi skal omtale som "preferansestrukturer med indekserte sannsynlighetsrom". Disse strukturene er vesentlige for å kunne belyse visse forhold ved de teoriene vi innfører i den neste paragrafen.

Definisjon 17.1: Med en *preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom* forstår vi en struktur S= <I,R, <N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/, C> der de enkelte komponentene oppfyller følgende krav:

(i) I er mengden av logisk mulige verdener

(ii) R er en preferanserelasjon over I

(iii) For alle wêI er <N(R,w),σ(w),p(w)> et endelig additivt sannsynlighetsrom over N(R,w), dvs. Mg(w': w'êI & w' L(R) w) der vi krever

(Ax)(Ay)(x,yêN(R,w) → σ(x)=σ(y) & p(x)=p(y))

(iv) C er definert på følgende måte:

C= Mg(<<x,y>,a>: x,yêU & aêReell & (Ew)[wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w) & μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0 & a= p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))])

Studerer man denne definisjonen ser man at den er nært forbundet med forutsetningene i Teorem 17.1. Forutsetningene i Teorem 17.1 impliserer at strukturen <I,R, <N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/, C> er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom. Omvendt impliserer antagelsen at strukturen <I,R, <N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/, C> er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom forutsetningene i Teorem 17.1. Ved hjelp av denne definisjonen kan derfor Teorem 17.1 reformuleres slik:

© Morten Harboe Rognes 2013

Teorem 17.2: Anta <I,R, <N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/, C> er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom. Da har man at

(a) C er en funksjon der Dom(C) Inkl UxU & Rgn(C) Inkl [0,1]

(b) C oppfyller kravene C3 - C10 nevnt i §16

Når det gjelder denne definisjonen bør det bemerkes at det eneste grunnbegrepet som brukes i definisjonen, utover rent mengdeteoretiske begreper, er begrepet om mulige verdener. Definisjonen er derfor formulert innenfor rammen av språket til utsagnsteorien T;1 og derfor innenfor rammen av egenskapsteorien. Det dreier seg derfor også om en definisjon hvor alle begrepene som inngår kan defineres innenfor rammen av de akseptanseteoriene vi tidligere har betraktet. Det følger også at definisjonen er formulert innenfor rammen av teorien C;1 som vi definerte i §16.

Som man ser fra Teorem 17.1 og 17.2 vil den relative sannsynlighetsfunksjonen som utgjør den siste komponenten i en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom oppfylle kravene C3 - C10.

Man ser også fra definisjonen av preferanserelasjoner med indekserte sannynlighetsrom at disse strukturene forbinder preferanserelasjoner med relative sannsynlighetsfunksjoner. En slik struktur kan derfor oppfattes som et mulig bindeledd mellom de akseptanseteoriene vi studerte i Del I og den teorien om troverdighetsgrad som vi presenterte i forrige paragraf. Vi skal nå gå over til å studere mulige sammenhenger som kan bestå mellom akseptanserelasjonen og preferanserelasjoner på den ene side og relative sannsynlighetsfunksjoner på den annen side.

§18 En teori om både aksepterbarhet og troverdighetsgrad.

Man husker fra §2 at Δ;4 betegnet den predikatmengden som fremkommer når mengden av de ikke-logiske predikatene i E;3, Δ, utvides med de følgende to predikater, nemlig (i) "x er et utsagn som bør aksepteres relativt til utsagnet y" og (ii) "z er den grad av rasjonell troverdighet som bør tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y". L;e(Δ;4) er da språket for mengdelære utvidet med alle predikatene i Δ;4. Man ser at alle aksiomene i akseptanseteorien B;1 er formler i språket L;e(Δ;4). Med andre ord har man at grunnsetningene B1 - B12 er formler i dette språket. Det samme gjelder grunnsetningene i teorien C;1 som vi definerte i §16. Vi betegnet disse grunnsetningene med C1 - C10. Også disse grunnseetningene er formler i L;e(Δ;4). La nå θ;1 være mengden som inneholder alle disse formlene, det vil si formlene B1 -B12 og C1 - C10. Vi skal nå betrakte teorien E;3 med språket utvidet til L;e(Δ;4) og med de ikke-logiske aksiomene utvidet med B1 - B12, samt C1 - C10. Vi skal kalle denne teorien for BC;1. Den kan formelt defineres slik:

BC;1 = ZFC;u(L;e(Δ;4))[θ;0U θ;1]

I det følgende skal vi ta vårt utgangspunkt i denne teorien.

Et forhold som karakteriserer teorien BC;1 er at den ikke inneholder noen prinsipper som forbinder akseptanse med grad av troverdighet. I det følgende skal vi studere en rekke potensielle grunnsetninger som forbinder akseptanserelasjonen Ba og den relative troverdighetsfunksjonen vi definerte i §16, nemlig funksjonen C. Vi minner om at funksjonen

© Morten Harboe Rognes 2013

C er definert som i §16, nemlig ved C= Mg(<<x,y>,z>: Cd(z,x,y))

I teorien B;1 kan man vise at det finnes en og bare en preferanserelasjon R' over I som er slik at (Ax)(Ay)(x,yêU →. Ba(x,y) ↔ ø≠Max(R,μ(y)) Inkl μ(x)). Denne relasjonen vil bli betegnet med "R" i det følgende.

Vi skal nå betrakte de følgende setninger i språket L;e(Δ;4) og etterhvert vise at de konsistent kan legges til teorien BC;1 som nye ikke-logiske aksiomer. Den første setningen er denne:

C11 Ba(x,y) & <x,y>êDom(C) → C(x,y) = 1

Dernest betrakter vi de følgende setninger:

C12a (Aw)(wêI → (Ey)(yêU & <y, μ;-1(Mg(r: rêI & rL(R)w))>êDom(C)))
C12b <x,y>êDom(C) & wêMax(R,μ(y)) →
<x, μ;-1(Mg(r: rêI & rL(R)w))>êDom(C)
C12c wêI & xêU & y= μ;-1(Mg(r: rêI & rL(R)w)) &
<K(x,y),y>êDom(C) → <x,y>êDom(C)
C12d wêI & <x1, μ;-1(Mg(r: rêI & rL(R)w))>êDom(C) &
<x2, μ;-1(Mg(r: rêI & rL(R)w))>êDom(C)
& C(x2, μ;-1(Mg(r: rêI & rL(R)w)))>0 → <x1,x2>êDom(C)

Konjunksjonen av C12a - C12d kaller vi C12. Tilslutt tar vi for oss den følgende setning:

C13 <x,y>êDom(C) →
(a) Max(R,μ(y))≠ø &
(b) (Aw)(wêMax(R,μ(y)) → [C(y,μ;-1(Mg(r: rêI & rL(R)w))>0 &
C(x,y) = C(x,K(y,μ;-1(Mg(r: rêI & rL(R)w))))])

I forbindelse med disse setningene skal vi først bevise det følgende teorem:

Teorem 18.1: Anta <I,R, <N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/, C> er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom. Definer Ba ved:
Ba(x,y) ↔ ø≠ Max(R,μ(y)) Inkl μ(x) om x,yêU
Da oppfyller C kravene C11, C12 og C13.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.
(a) Vi skal først vise at C11 holder. Med andre ord skal vi vise:
(1) Ba(x,y) & <x,y>êDom(C) → C(x,y)=1. Anta derfor (2) Ba(x,y) & <x,y>êDom(C). Fra den første konjunkten her og forutsetningen i teoremet følger: (3) ø≠ Max(R,μ(y)) Inkl μ(x) Fra den andre forutsetningen følger ved hjelp av definisjonen av C at det finnes wêI og a slik at: (4) aêReell & wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w)
& μ(y)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0 &
a= p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))
Fra (4) følger trivielt at wêMax(R,μ(y)). Fra dette og Lemma 17.1 følger videre at Max(R,μ(y))= μ(y)ΩN(R,w). Fra dette og (3) har vi derfor

© Morten Harboe Rognes 2013

(5) $\mu(x)\Omega\mu(y)\Omega N(R,w) = \mu(y)\Omega N(R,w)$. Fra (5) og de to siste konjunktene i (4) følger at a=1. Fra dette, (4) og definisjonen av C følger så C(x,y)=1. Dette viser at C11 holder.

(b) Vi skal nå vise at C13 holder. Anta (1) $<x,y>\hat{e}Dom(C)$. Det følger da fra forutsetningene og definisjonen av C at det finnes a0 og w0êI slik at

(2) $a0\hat{e}Reell \ \& \ w0\hat{e}Max(R,\mu(y)) \ \& \ \mu(x)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$
$\& \ \mu(y)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0) \ \& \ p(w0)(\mu(y)\Omega N(R,w0))\neq 0 \ \&$
$a0= p(w0)(\mu(x)\Omega\mu(y)\Omega N(R,w0))/p(w0)(\mu(y)\Omega N(R,w0))$

Fra den andre kojunkten i (2) følger $Max(R,\mu(y))\neq ø$. Dette viser at den første halvdelen av C13 holder. Vi må imidlertid også vise

(3) $(Aw)(w\hat{e}Max(R,\mu(y)) \rightarrow [C(y,\mu;-1(Mg(r: r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w)))>0 \ \&$
$C(x,y) = C(x,K(y,\mu;-1(Mg(r: r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w))))])$

Anta derfor for vilkårlig w at (4) $w\hat{e}Max(R,\mu(y))$. Fra dette og den andre konjunkten i (2) følger (5) wL(R)w0 og derfor at (6) N(w0) = Mg(r: rêI & rL(R)w). Nå har vi:

(7.1) $w0\hat{e}Max(R,\mu(\mu;-1(Mg(r: r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w)))) = N(w0)$

(7.2) $\mu(y)\Omega N(w0)\hat{e}\sigma(w0)$

(7.3) $p(w0)(\mu(y)\Omega N(w0))=$
$p(w0)(\mu(y)\Omega \ \mu;-1(Mg(r: r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w))\Omega N(w0))\neq ø$

(7.4) $p(w0)(\mu;-1(Mg(r: r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w)\Omega N(w0))= p(w0)(N(w0))=1$

Fra (7.1) - (7.4) samt definisjonen av C følger: $C(y,\mu;-1(Mg(r: r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w)))>0$. Dette viser at den ene delen av (3) holder.

Vi kan fra (2) og definisjonen av C slutte at (8) C(x,y)=a0. Vi må vise at (9) $C(x,K(y,\mu;-1(Mg(r: r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w)))) =a0$. Nå har man i lys av (4) at

(10) $K(y,\mu;-1(Mg(r: r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w)))=\mu(y)\Omega N(w0)$ Sett per definisjon

(11) $d0= \mu(y)y\Omega \ N(w0)$. Vi har da

(12.1) $w0\hat{e}Max(R,\mu(y))=y\Omega N(w0)=Max(R,\mu(y)\Omega N(w0))= Max(R,d0)$

(12.2) $\mu(x)\Omega N(w0)\hat{e}\sigma(w0)$

(12.3) $d0\Omega N(w0)= \mu(y)\Omega N(w0)\hat{e}\sigma(w0)$ Dette følger fra (2)

(12.4) $p(w0)(d0\Omega N(w0)) \neq 0$

(12.5) $p(w0)(\mu(x)\Omega d0\Omega N(w0))/p(w0)(d0\Omega N(w0))=a0$

De to siste påstandene følger ved hjelp av (2). Fra (12.1) - (12.5) følger ved hjelp av definisjonen av C at (9) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at C13 holder

(c) Vi skal vise at C12a holder. Dette innebærer at vi må vise:

(1) $w\hat{e}I \rightarrow (Ey)(y\hat{e}U \ \& \ <y, \mu;-1(Mg(r:r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w))>\hat{e}Dom(C)$.

Anta derfor for vilkårlig w at (2) wêI. Sett per definisjon

(3) $d(w) = \mu;-1(Mg(r:r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w))$

Da har vi åpenbart $d(w)\hat{e}U$. Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise $<d(w),d(w)>\hat{e}Dom(C)$. I lys av definisjonen av C vil det være til strekkelig å vise at det finnes a slik at

(4) $a0\hat{e}Reell \ \& \ w\hat{e}Max(R,\mu(d(w))) \ \& \ \mu(d(w))\Omega N(R,w)\hat{e}\sigma(w)$
$\& \ \mu(d(w))\Omega N(R,w)\hat{e}\sigma(w) \ \& \ p(w)(\mu(d(w))\Omega N(R,w))\neq 0 \ \&$
$a0= p(w)(\mu(d(w))\Omega\mu(d(w))\Omega N(R,w'))/p(w)(\mu(d(w))\Omega N(R,w))$

Nå har man åpenbart at $Max(R,\mu(d(w))= Max(R,Mg(r:r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w))=N(R,w)$. Da

(5.1) $w\hat{e}N(R,w)=Max(R,\mu(d(w)))$

Siden vi har $\mu(d(w)) =Mg(r:r\hat{e}I \ \& \ rL(R)w) = N(R,w)$ har vi:

(5.2) $\mu(d(w))\Omega N(R,w)= N(R,w)\hat{e}\sigma(w)$

(5.3) $1=p(w)(N(R,w)) = p(w)(\mu(d(w))\Omega N(R,w)) \neq 0$

© Morten Harboe Rognes 2013

(5.4) $1= p(w)(N(R,w))/p(w)(N(R,w)) = p(w)(\mu(d(w))\Omega\mu(d(w))\Omega N(R,w'))/p(w)(\mu(d(w))\Omega N(R,w))$

Man ser at (4) følger fra (5.1) - (5.4). Dette viseer at C12a holder.

(d) Vi må vise at C12b holder. Anta (1) $<x,y>\hat{e}Dom(C)$ & $w\hat{e}Max(R,\mu(y))$. Fra dette og definisjonen av C følger eksistensen av $w0\hat{e}I$ og a slik at

(2) $a\hat{e}Reell$ & $w0\hat{e}Max(R,\mu(y))$ & $\mu(x)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$ & $\mu(y)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$ & $p(w0)(\mu(y)\Omega N(R,w0))\neq 0$ & $a= p(w0)(\mu(x)\Omega\mu(y)\Omega N(R,w0))/p(w0)(\mu(y)\Omega N(R,w0))$

Fra (1) og (2) følger w L(R)w0 og derfor

(3) $N(R,w0)=N(R,w)$, & $\sigma(w)=\sigma(w0)$ & $p(w)=p(w0)$. Siden $p(w0)(N(R,w0)) = p(w)(N(R,w))=1$ og $N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$ har vi at det finnes w0,b slik at

(4) $w0\hat{e}Max(R,N(R,w0))$ & $N(R,w0)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$ & $\mu(x)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$ & $p(N(R,w0))\neq\emptyset$ $p(w0)(\mu(x)\Omega N(R,w0))/p(w0)(N(R,w0)) = b$

Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av C at

$<x,N(R,w)> = <x, \mu;-1(Mg(r:r\hat{e}I$ & $rL(R)w))>\hat{e}Dom(C)$. Dette viser at C12b holder.

(e) Vi må vise C12c holder. Dette innebærer at det må bevises at

(1) $w\hat{e}I$ & $x\hat{e}U$ & $y= \mu;-1(Mg(r: r\hat{e}I$ & $rL(R)w))$ & $<K(x,y),y>\hat{e}Dom(C) \rightarrow <x,y>\hat{e}Dom(C)$

Vi har (2) $N(R,w) = Mg(r: r\hat{e}I$ & $rL(R)w)$ Vi setter per definisjon $\eta(w) = \mu;-1(N(R,w))$. Det vil da være tilstrekkelig å bevise:

(3) $w\hat{e}I$ & $x\hat{e}U$ & $<K(x,\eta(w),\eta(w)>\hat{e}Dom(C) \rightarrow <x,\eta(w)>\hat{e}Dom(C)$

Anta derfor (4) $w\hat{e}I$ & $x\hat{e}U$ & $<K(x,\eta(w),\eta(w)>\hat{e}Dom(C)$. Det følger at det finnes a og $w0\hat{e}I$ slik at $a\hat{e}Reell$ og der

(5.1) $w0\hat{e}Max(R,N(R,w))$ & $\mu(x)\Omega N(R,w)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$

(5.2) $N(R,w)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$

(5.2) $p(w0)(N(R,w)\Omega N(R,w0))\neq 0$

(5.3) $p(w0)(\mu(x)\Omega N(R,w)\Omega N(R,w0))/ p(w0)(N(R,w)\Omega N(R,w0))=a$

Fra (5.1) følger $w0L(R)w$. Det følger at $N(R,w)=N(R,w0)$ Fra dette, definisjonen av C og (5.1) - (5.3) følger så lett $<x,\eta(w)>\hat{e}Dom(C)$. Dette viser C12c holder.

(f) Vi må vise at C12d holder. For å forenkle notasjonen litt, på samme måte som i beviset for forrige påstand, setter vi per definisjon $\eta(w) = \mu;-1(N(R,w))$. Anta så at

(1) $w\hat{e}I$ & $<x1,\eta(w)><x2,\eta(w)>\hat{e}Dom(C)$ & $C(x2,\eta(w))>0$ og anta

(2) $w\hat{e}Max(R,\mu(x2))$. Vi ønsker da å vise $<x1,x2>\hat{e}Dom(C)$

Fra (1) og (2) følger ved hjelp av definisjonen av C at det finnes $w1,w2\hat{e}I$ og reelle tall a1,a2 slik at

(3.1) $w1\hat{e}Max(R,\mu(\eta(w))$ & $\mu(x1)\Omega N(R,w1)\hat{e}\sigma(w1)$ & $\mu(\eta(w))\Omega N(R,w1)\hat{e}\sigma(w1)$ & $p(w1)(\mu(\eta(w))\Omega N(R,w1))\neq\emptyset$ & $p(w1)(\mu(x1)\Omega\mu(\eta(w))\Omega N(R,w1))/ p(w1)(\mu(\eta(w))\Omega N(R,w1)) =a1$

(3.2) $w2\hat{e}Max(R,\mu(\eta(w))$ & $\mu(x2)\Omega N(R,w2)\hat{e}\sigma(w2)$ & $\mu(\eta(w))\Omega N(R,w2)\hat{e}\sigma(w2)$ & $p(w2)(\mu(\eta(w))\Omega N(R,w2))\neq\emptyset$ & $p(w2)(\mu(x2)\Omega\mu(\eta(w))\Omega N(R,w2))/ p(w2)(\mu(\eta(w))\Omega N(R,w2)) =a2$

Fra de to første konjunktene i henholdsvis (3.1) og (3.2) følger:

(4) w1 L(R) w L(R) w2. Vi har derfor i lys av definisjonen av "N(R,w)" at

(5) $N(R,w1) = N(R,w2) = N(R,w)$ og dessuten at

© Morten Harboe Rognes 2013

(6) $p(w1)=p(w2)=p(w)$ & $\sigma(w1)=\sigma(w2) = \sigma(w)$.

Siden $C(x2,\eta(w)) >0$ følger det ved hjelp av (3.2) at $a2>0$. Siden $p(w)(N(R,w))=1$ følger det i lys av (5), (6) og (3.2) at (7) $p(w)(x2\Omega N(R,w))\neq 0$. Videre følger fra (3.1) og (3.2) at

(8) $\mu(x2)\Omega N(R,w)\hat{e}\sigma(w)$ & $\mu(x1)\Omega N(R,w)\hat{e}\sigma(w)$

Dessuten har vi fra forutsetningene at (9) $w\hat{e}Max(R,\mu(x2))$ Det følger også i lys av (7) at det må finnes $a\hat{e}[0,1]$ slik at

(10) $p(w)(\mu(x1)\Omega\mu(x2)\Omega N(R,w))/p(w)(\mu(x2)\Omega N(R,w)) =a$

Fra (7), (8), (9), (10) og definisjonen av C følger $<x1,x2>\hat{e}Dom(C)$. Dette viser at C12d holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi har nå vist at dersom man tar sitt utgangspunkt i en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom kan man vise at den relative sannsynlighetsfunksjonen som inngår i strukturen oppfyller alle kravene C3 - C13. Anta man videre at Ba er definert som i teoremet ovenfor kan man faktisk også vise at denne akseptanserelasjonen oppfyller alle aksiomene i teorien B;1. Man kan derfor si at preferansestrukturer med indekserte sannsynlighetsrom representerer en art modeller for teorien BC;1.

Man kan imidlertid spørre om man også kan gå den andre veien. Anta C er en relativ sannsynlighetsfunksjon der domenet er inkludert i UxU og verdiområdet er inkludert i [0,1], og anta at den oppfyller kravene C3-C10, C12a - C12d og C13. Anta R er en preferanse-relasjon over I. Er det da mulig, gitt <C,R>, å definere en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom på en naturlig måte slik at den relative sannsynlighetsfunksjonen i preferansestrukturen er identisk med C? Det neste teoremet viser at dette er mulig.

Teorem 18.2: Anta R er en preferanserelasjon over I og la C være en funksjon der Dom(C) Inkl UxU & Rgn(C) Inkl [0,1]. Anta C og R oppfyller kravene C3 - C10 og kravene C12a - C12d og C13. Definer for alle $w\hat{e}I$

(i) $p(w) = Mg(<\mu(x), C(x, \mu;\text{-}1(Mg(r: rL(R)w))>: <x,\mu;\text{-}1(Mg(r: rL(R)w))>\hat{e}Dom(C))$

(ii) $\sigma(w) = Mg(\mu(x): <x, \mu;\text{-}1(Mg(r: rL(R)w))>\hat{e}Dom(C))$

(iii) $N(R,w) = Mg(r: rL(R)w)$

La C* være definert ved:

(iv) $C^* = Mg(<<x,y>,a>: x,y\hat{e}U$ & $a\hat{e}Reell$ & $(Ew)[w\hat{e}Max(R,\mu(y))$ & $\mu(x)\Omega N(R,w)\hat{e}\sigma(w)$ & $\mu(y)\Omega N(R,w)\hat{e}\sigma(w)$ & $p(w)(\mu(y)\Omega N(R,w))\neq 0$ & $a= p(w)(\mu(x)\Omega\mu(y)\Omega N(R,w))/p(w)(\mu(y)\Omega N(R,w))])$

Gitt disse forutsetningene har man at

(a) $<I,R, <N(R,w),\sigma(w),p(w)>/w\hat{e}I/, C^*>$ er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom.

(b) $C^* = C$

Bevis: *Ad (a)*: For å vise at (a) holder vil det være nok å vise at $<N(R,w),\sigma(w),p(w)>$ er et endelig additivt sannsynlighetsrom for alle $w\hat{e}I$. Anta derfor (1) $w\hat{e}I$. Vi må først vise at $\sigma(w)$ er et endelig additivt sannsynlighetsrom over N(R,w). Anta for vilkårlig x at $x\hat{e}\sigma(w)$. Fra definisjonen av σ, gitt i teoremet, følger $<\mu;\text{-}1(x), \mu;\text{-}1(Mg(r: rL(R)w))>\hat{e}Dom(C)$. Siden C oppfyller kravet C3 følger herav $<\mu;\text{-}1(I - x), \mu;\text{-}1(Mg(r: rL(R)w))>\hat{e}Dom(C)$. Ved hjelp av C8 kan man fra dette slutte at $<K(\mu;\text{-}1(N(R,w)),\mu;\text{-}1(I - x)) ,\mu;\text{-}1(Mg(r: rL(R)w))>\hat{e}Dom(C)$. Men vi har $\mu(K(\mu;\text{-}1(N(R,w)),\mu;\text{-}1(I - x))) = N(R,w)\Omega(I\text{-}x) = N(R,w) -x$ siden N(R,w) Inkl I.

© Morten Harboe Rognes 2013

Det følger fra dette at (N(R,w)-x)êσ(w).

Vi må også vise at σ(w) er lukket under endelig union. Anta derfor x1,x2êσ(w). Det følger da ved hjelp av definisjonen av σ at

<μ;-1(x1), μ;-1(Mg(r: rL(R)w))>êDom(C) &
<μ;-1(x2), μ;-1(Mg(r: rL(R)w))>êDom(C)

Fra dette og C6 følger <μ;-1(x1Ux2), μ;-1(Mg(r: rL(R)w))>êDom(C). Herav har vi så ved hjelp av definisjonen av σ at x1Ux2êσ(w)

Endelig må det også bevises at N(R,w)êσ(w). Dette innebærer at vi må bevise at <μ;-1(N(R,w)), μ;-1(Mg(r: rL(R)w))>êDom(C). Siden wêI har vi ved hjelp av C12a at <y, μ;-1(Mg(r: rL(R)w))>êDom(C) for noe utsagn y. Fra dette og C5 følger siden N(R,w) = Mg(r: rL(R)w) at <μ;-1(N(R,w),μ;-1(N(R,w)>êDom(C). Men fra dette og definisjonen av σ følger N(R,w)êσ(w).

Dermed har vi vist at σ(w) er en naturlig boolsk algebra over N(R,w), med andre ord en endelig-additiv boolsk algebra over N(R,w), for alle wêI.

Vi må nå vise at at p(w) oppfyller de krav som stilles for at <N(R,w),σ(w), p(w)> skal være et sannsynlighetsrom over N(R,w). Det første vi da må vise er at p(w) er en funksjon der domenet er σ(w). Men dette følger fra definisjonene av p(w) og σ(w). Videre er det klart at 0=<p(w)(x)=<1 om xêσ(w) i lys av definisjonen av p(w) siden C er en funksjon der Dom(C) Inkl UxU og der Rgn(C) Inkl [0,1]. Nå har man p(w)(N(R,w))=1. I lys av definisjonen av p(w) er dette ekvivalent med C(μ;-1(N(R,w)),μ;-1(Mg(r: rL(R)w)))=1. Dette følger fra C12a og C6 siden N(R,w)=Mg(r: rL(R)w). Det gjenstår derfor bare å vise at p(w) er et endelig-additivt sannsynlighetsmål. Anta derfor at x,yêσ(w) & xΩy=ø. I lys av definisjonen av σ(w) følger da at

<μ;-1(x1), μ;-1(Mg(r: rL(R)w))>êDom(C) &
<μ;-1(x2), μ;-1(Mg(r: rL(R)w))>êDom(C)

Fra dette og det at xΩy=ø følger ved hjelp av C7 at siden N(R,w)=Mg(r: rL(R)w)

C(D(μ;-1(x1), μ;-1(x2), μ;1(N(R,w))) =
C(μ;-1(x1), μ;1(N(R,w))) + C(μ;-1(x2), μ;1(N(R,w)))

Men fra definisjonen av p(w) følger

p(w)(x1Ux2) =C(D(μ;-1(x1), μ;-1(x2), μ;1(N(R,w)))
p(w)(x1) = C(μ;-1(x1), μ;1(N(R,w)))
p(w)(x2) =C(μ;-1(x2), μ;1(N(R,w)))

Fra alt dette følger så p(w)(x1Ux2) = p(w)(x1)+ p(w)(x2). Dette viser at p(w) oppfyller kravene til å være et endelig-additivt sannsynlighetsmål over σ(w). Vi har nå vist at <I,R, <N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/, C*> er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom, og dermed levert et fullstendig bevis for punkt (a) i satsen.

Ad (b): Vi skal nå gi bevis for punkt (b) i teoremet. Vi skal vise C* = C. Det vil være tilstrekkelig å bevise (+) <<x,y>,a>êC* ↔ <<x,y>,a>êC for vilkårlige x, y og a.

(I) Vi viser først kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (1) <<x,y>,a>êC*. ved hjelp av definisjonen av C* kan vi da slutte at det finnes w êI der:

(2.0) x,yêU & aêReell
(2.1) wêMax(R,μ(y)) & μ(x)ΩN(R,w)êσ(w) & μ(y)ΩN(R,w)êσ(w)
(2.2) p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠0
(2.3) a= p(w)(μ(x)Ωμ(y)ΩN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))

© Morten Harboe Rognes 2013

Fra dette, definisjonene av p(w) og σ(w) og det at N(R,w)= Mg(r: rL(R)w) kan man slutte i det vi per definisjon setter η(w)= μ;-1(N(R,w)):

(3.1) <K(x,η(w)), η(w)>êDom(C)

(3.2) <K(y,η(w)), η(w)>êDom(C)

(3.3) C(K(y,η(w), η(w))>0

(3.4) C(K(K(x,y),η(w)), η(w)) / C(K(y,η(w)), η(w)) =a

Fra (3.1) og (3.2) følger ved hjelp av C12c at

(4) <x,η(w)>,<y,η(w)>êDom(C). Fra dette, C8 og (3.3) har vi:

(4.1) C(K(y,η(w), η(w)) = C(y,η(w)) >0 Fra (4) og (4.1) kan man ved hjelp av C10 utlede:

(5) C(K(x,y),η(w)) = C(x, K(η(w),y) * C(y,η(w))

Fra (4) og (4.1) følger ved hjelp av C12d siden wêI at

(6) <x,y>êDom(C). Fra dette, C13 og (2.1) følger:

(7) C(x,y) = C(x,K(η(w),y))

Vi har at <K(x,y),η(w)>êDom(C) i lys av (4). Fra dette og C8 følger

(8) C(K(K(x,y),η(w), η(w)) = C(K(x,y),η(w)) og dessuten fra (4.1)

(9) C(K(y,η(w), η(w)) = C(y,η(w)) >0

Fra (5), (7), (8) og (3.4) følger så C(x,y)=a. Herav <<x,y>,a>êC. Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (+) holder.

(II) La oss nå vise at kondisjonalen mot venstre i (+) holder. Anta derfor (1) <<x,y>,a>êC for vilkårlige x,y a. Vi ønsker å vise <<x,y>,a>êC* Fra (1) har da at (2) <x,y>êDom(C) og dessuten (3) C(x,y)=a. Fra (2) og C13 kan man slutte at det finnes w der (3.1) wêI & wêMax(R,μ(y)) Ved hjelp av C13 og C12b kan man utlede:

(4.1) <x,η(w)>êDom(C)

(4.2) <y,η(w)>êDom(C)

(4.3) C(x,y) = C(x,K(y,η(w)).

Fra (4.1), (4.2) og C8 følger:

(5) <K(x,η(w)),η(w)>êDom(C) & <K(y,η(w)),η(w)>êDom(C)

Fra dette følger da ved hjelp av definisjonene av p(w) og σ(w) at

(6) μ(x)ΩN(R,w)êσ(w) & μ(y)ΩN(R,w)êσ(w)

Fra (2),(3) og C13 kan man slutte at

(7) C(y,η(w))>0.

Fra dette og (4.1)-(4.3) og C10 følger:

(8) C(x,y) = C(K(x,y),η(w))/C(y,η(w))

I lys av C8, (4.1) og (4.2) følger:

(9.1) C(K(K(x,y),η(w)),η(w)) = C(K(x,y),η(w))

(9.2) C(K(y,η(w)),η(w)) = C(y,η(w))

Fra dette, (3), (8) og (4.3) kan man slutte:

(10) a= p(w)(μ(x)Ωμ(y)μN(R,w))/p(w)(μ(y)ΩN(R,w))

Fra (7) følger C(K(y,η(w)),η(w))>0. og derfor (11) p(w)(μ(y)ΩN(R,w))≠ø ved hjelp av definisjonen av p(w). Fra (3.1), (6), (10) og (11) følger ved hjelp av definisjonen av C* at C*(x,y)=a og derfor at <<x,y>,a>êC*.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 18.2. **QED**.

La oss nå vende tilbake til teorien BC;1. Som nevnt inneholder denne teorien ikke eksplisitt

© Morten Harboe Rognes 2013

noen prinsipper som forbinder akseptansepredikatet, "Ba(x,y)" med predikatet om grad av troverdighet, ie. "Cd(z,x,y)". Nå kan man, som vi allerede har sett, i teorien B;1 utlede at det finnes en og bare en preferanserelasjon R' over I som oppfyller kravet

(Ax)(Ay)(Ba(x,y) ↔ x,yêU & ø≠Max(R',μ(y) Inkl μ(x))

Denne sats kan naturligvis også utledes i BC;1 siden B;1 er en delteori av denne mer omfattende teorien. Vi kan derfor definere "R" ved å sette:

(1) R = (iR')(Pref(R',I) & (Ax)(Ay)(Ba(x,y) ↔ x,yêU & ø≠Max(R',μ(y) Inkl μ(x))

og legge denne definisjonen til BC;1. Men da fremgår det at vi kan utvide BC;1 med ytterligere et knippe av ikke-logiske aksiomer, nemlig aksiomene C11, C12a - C12d og aksiomet C13. Denne teorien, som er formulert helt innenfor rammen av L;e(Δ;4), skal vi betegne med BC;2. Den er naturlig nok langt sterkere enn BC;1. Også for denne teorien vil en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom være en naturlig modell. Teorem 18.2 viser også at vi innenfor denne teorien kan definere en slik struktur på en naturlig måte og vise at den relative sannsynlighetsfunksjonen i strukturen er identisk med den relative sannsynlighetsfunksjonen C= Mg(<<x,y>,z>: Cd(z,x,y)).

Aksiom B11 forbinder akseptanserelasjonen med funksjonen C. Dette innebærer at aksiomet forbinder predikatet "Utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y" med predikatet "z er den grad av rasjonell troverdighet som bør tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y". Som man husker dreide det seg om følgende påstand:

B11 Ba(x,y) & <x,y>êDom(C) → C(x,y) = 1

Dette aksiomet sier altså at dersom et utsagn x bør aksepteres relativt til et utsagn y så er graden av rasjonell troverdighet til utsagnet x relativt til y lik 1, men bare dersom x kan tilordnes en grad av troverdighet relativt til y, med andre ord bare om <x,y>êDom(C).

Aksiomet virker tilforlatelig om man aksepterer at de begrepene som er involvert gir mening. Bør jeg akseptere at bussen kommer på basis av min totale bakgrunnskunnskap, og kan man i et hele tatt tilskrive påstanden at bussen kommer noen rasjonell grad av troverdighet relativt til min bakgrunnskunnskap, så bør man tilskrive den påstanden maksimal grad av troverdighet, nemlig troverdighetsgraden 1.

Vi anser B11 som et svært viktig prinsipp. Som man husker fant vi det ytterst rimelig at visse vitenskapelige teorier, for eksempel Einsteins relativitetsteori, bør aksepteres relativt til den totale evidens som foreligger. Fra dette og B11 følger det da at dersom det er mulig å tilordne Einsteins relativitetsteori en rasjonell grad av troverdighet relativt til den totale evidens som foreligger, må denne grad av troverdighet nødvendigvis være 1. Den kan ikke være mindre enn 1. Den kan ikke foreksempel bare være 0.1. Dessuten må alle andre akseptable vitenskapelige teorier ha den samme maksimale grad av troverdighet. I en viss forstand hefter det derfor ikke noen usikkerhet ved disse teoriene når de betraktes relativt til den totale foreliggende evidens. En helt annen sak er om teoriene bør aksepteres relativt til den totale evidens som forligger ved et fjernt punkt i fremtiden. Det er intet som logisk sett forhindrer dette. Ved et slikt fremtidig tidspunkt kan bildet være et helt annet.

Imidlertid er det mulig å betrakte noen sterkere versjoner av B11. Vi har i tankene de

© Morten Harboe Rognes 2013

følgende formler:

B11a $B(x,y) \leftrightarrow C(x,y) = 1$
B11b $Ba(x,y) \rightarrow C(x,y) = 1$
B11c $<x,y>\hat{e}Dom(C) \rightarrow (Ba(x,y) \leftrightarrow C(x,y) = 1)$

Det er åpenbart at B11a impliserer B11b og B11c. Dessuten er det klart at B11c impliserer B11. Alle formlene er derfor sterkere enn B11.

Her skal vi i første omgang beskjeftige oss med B11a. Når det gjelder denne formelen kan man vise at den holder i alle preferansestrukturer med indekserte sannsynlighetsrom der enhver ikke-tom delmengde av ethvert preferansenivå er med i sannsynlighetsrommet tilordnet dette nivå og enhver slik delmengde har en sannsynlighet som er større enn 0. Dette må karakteriseres som en meget sterk og urealistisk antagelse. Men fra en rent logisk synsvinkel finnes slike preferansestrukturer og som nevnt holder B11a i slike strukturer.

La oss vise dette:

Teorem 18.3: Anta $<I,R,<N(R,w), \sigma(w),p(w)>/w\hat{e}I/, C>$ er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom. Anta videre:

(i) $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Pt(N(R,w)) \text{ Inkl } \sigma(w))$
(ii) $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ax)(\emptyset \neq x\hat{e}Pt(N(R,w)) \rightarrow p(w)(x)>0))$

Da har man at følgende holder for alle $x,y\hat{e}U$:

$Ba(x,y) \leftrightarrow C(x,y)=1$

Bevis: (a) Vi skal først vise kondisjonalen mot høyre i teoremet konsekvent. Anta derfor (1) $x,y\hat{e}U$ & $Ba(x,y)$. Da har man at (2) $\emptyset \neq Max(R,\mu(y)) \text{ Inkl } \mu(x)$. Det finnes da $w0\hat{e}I$ slik at (3) $w0\hat{e}Max(R,\mu(y))$. Fra dette og forutsetningene kan man slutte at
(4) $Max(R,\mu(y)) = \mu(y)\Omega N(R,w0)$. Man har da ved hjelp av forutsetning (ii) at
(5) $p(w0)(\mu(y)\Omega N(R,w0)) >0$. Videre har vi fra (4), forutsetning (i) og det at $w0\hat{e}I$ at
(6) $\mu(y)\Omega N(R,w)\hat{e}\sigma(w0)$. Siden $x\hat{e}U$ har vi $\mu(x)\Omega N(R,w0) \text{ Inkl } N(R,w0)$ og derfor i lys av forutsetning (i) at (7) $\mu(x)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$. Fra dette og (6) har man videre:

(8) $\mu(x)\Omega\mu(y)\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$. Men i lys av (2) og (4) har vi også at
(9) $\mu(x)\Omega\mu(y)\Omega N(R,w0) = \mu(y)\Omega N(R,w0)$. Det følger at
(10) $p(w0)(\mu(x)\Omega\mu(y)\Omega N(R,w0))= p(w0)(\mu(y)\Omega N(R,w0))$.

Derfor har vi:

(11) $p(w0)(\mu(x)\Omega\mu(y)\Omega N(R,w0)) / p(w0)(\mu(y)\Omega N(R,w0)) =1$.

Fra (3), (5), (6), (7), (11), samt definsjonen av C følger $C(x,y)=1$. Dermed er den ene halvdelen av teoremet bevist.

(b) Anta (1) $C(x,y)=1$. Fra definisjonen av C følger da at det finnes $w\hat{e}I$ der vi har:
(2.1) $x,y\hat{e}U \ \& \ \mu(x)\Omega N(R,w)\hat{e}\sigma(w) \ \& \ \mu(y)\Omega N(R,w)\hat{e}\sigma(w)$
(2.2) $w\hat{e}Max(R,\mu(y)) \ \& \ p(w)(\mu(y)\Omega N(R,w))>0$
(2.3) $p(w)(\mu(x)\Omega \mu(y)\Omega N(R,w))/ p(w)(\mu(y)\Omega N(R,w)) =1$

Vi må vise at (+) $Max(R,\mu(y)) \text{ Inkl } \mu(x)$. Siden vi fra (2.2) kan slutte
(3) $Max(R,\mu(y)) = \mu(y)\Omega N(R,w)$ er det nok å bevise:
(++) $\mu(x)\Omega \mu(y)\Omega N(R,w) = \mu(y)\Omega N(R,w)$

Fra (2.3) følger (4) $\emptyset \neq \mu(x)\Omega \mu(y)\Omega N(R,w) \text{ Inkl } \mu(y)\Omega N(R,w)$

Anta nå for reduktio ad absurdum at

© Morten Harboe Rognes 2013

(5) $\mu(x)\Omega\ \mu(y)\Omega N(R,w)$ SInkl $\mu(y)\Omega N(R,w)$

For å forenkle notasjonen, sett $q=\mu(y)\Omega N(R,w)$ og $s=\mu(x)\Omega\ \mu(y)\Omega N(R,w)$. Siden $s\neq\emptyset$ har vi etter forutsetning (ii) at $p(w)(s)>0$. Fra (5) følger s SInkl q og derfor at $sU(q-s)=q$ og at $(q-s)\neq\emptyset$. Da har vi ved hjelp av forutsetning (ii), siden $q-s\hat{e}Pt(N(R,w))$ at $p(w)(q-s)>0$ og dessuten at $p(w)(s) + p(w)(q-s) = p(w)(q)$. Men fra dette følger $0< p(w)(s) <p(q)$ og derfor at $0< p(w)(s)/p(w)(q)<1$. I lys av definisjonene av s og q strider dette åpenbart mot (2.3). Det følger at (5) er gal og i lys av (4) følger (++). Men fra (++) og (3) følger (+). Fra dette følger så Ba(x,y).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Man ser fra dette teoremet at gitt $<I,R,<N(R,w), \sigma(w),p(w)>/w\hat{e}I/, C>$ er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom impliserer forutsetningene B11a. Man kan imidlertid spørre om det omvendte holder, med andre ord gitt at $<I,R,<N(R,w), \sigma(w),p(w)>/w\hat{e}I/, C>$ er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom, og gitt at B11a holder, har man da at (i) og (ii) i teoremet ovenfor holder? Svaret på dette er bekreftende. Man kan til og med visse noe sterkere, nemlig at det er nok å forutsette B11b. Det følgende teorem viser at dette er tilfelle.

Teorem 18.4: Anta $<I,R,<N(R,w), \sigma(w),p(w)>/w\hat{e}I/, C>$ er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom. Anta videre:

(i) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}U \rightarrow .\ Ba(x,y) \rightarrow C(x,y)=1$

Da har man at følgende holder.

(a) $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ax)(\emptyset\neq x\hat{e}Pt(N(R,w)) \rightarrow p(w)(x)>0))$

(b) $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Pt(N(R,w))$ Inkl $\sigma(w))$

Bevis: Punkt (b) følger fra punkt (a). For anta $w\hat{e}I$ & $x\hat{e}Pt(N(R,w))$. Da er x enten nullmengden eller $x\neq\emptyset$. I det første tilfelle er det åpenbart at $x\hat{e}\sigma(w)$. I det andre tilfelle har vi ved hjelp av (a) at $p(w)(x)>0$. Da må $x\hat{e}Dom(p(w))$. Men $Dom(p(w))=\sigma(w)$. Det følger at $x\hat{e}\sigma(w)$. Dette viser at (b) holder.

La oss så gi et bevis for punkt (a). Anta forutsetningene i satsen holder og anta for reduktio ad absurdum at det finnes w og x der:

(1) $w\hat{e}I$ & $\emptyset\neq x\hat{e}Pt(N(R,w))$ & $p(w)(x)=0$. Det følger da at (2) x Inkl N(R,w) &$\neq\emptyset$. Fra dette følger i sin tur at (3) $x\Omega N(R,w)=x$. Videre har vi da at Videre følger det herav at (4) $Max(R,x) = x\Omega N(R,w) = x \neq\emptyset$. Da har vi $\emptyset\neq Max(R,x)$ Inkl x og derfor:
(5) $Ba(\mu;\text{-}1(x),\mu;\text{-}1(x))$. Fra dette og forutsetning (i) kan man slutte at
(6) $C(\mu;\text{-}1(x), \mu;\text{-}1(x))=1$. Fra dette og definisjonen av C følger existensen av $w0\hat{e}I$ slik at
(7) $w0\hat{e}Max(R,x)$ & $x\Omega N(R,w0)\hat{e}\sigma(w0)$ & $p(w0)(x\Omega N(R,w0))>0$. Men siden $w0\hat{e}Max(R,x)$ og vi har at $Max(R,x)=x\Omega N(R,w)$ følger w0 L(R) w og derfor ved hjelp av forutsetningene i satsen at $\sigma(w)=\sigma(w0)$ & $p(w)=p(w0)$ & $N(R,w0)=N(R,w)$. Men fra dette, (4) og siste konjunkt i (7) følger $p(w)(x\Omega N(R,w))=p(w)(x)>0$. Dette strider mot (1). Vi må derfor ha at punkt (a) holder. **QED**.

Man ser fra Teorem 18.3 og Teorem 18.4 at dersom $<I,R,<N(R,w), \sigma(w),p(w)>/w\hat{e}I/, C>$ er en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom impliserer det at $Ba(x,y) \rightarrow C(x,y)=1$, for alle $x,y\hat{e}U$, at $C(x,y)=1\rightarrow Ba(x,y)$. Gitt denne forutsetningen er derfor B11a og B11b ekvivalente. I BC;2 kan man ifølge Teorem 18.2 vise at det finnes en

© Morten Harboe Rognes 2013

preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom der en relative sannsynlighetsfunksjonen i strukturen, la oss kalle den C*, er identisk med C. I teorien BC;2 kan man derfor utlede at B11a holder hvis og bare hvis B11b holder.

§19 Relative sannsynlighetsfunksjoner.

Vi skal gi bevis for en sats som har en viss likhet med den vi beviste sist i §18. Imidlertid er denne satsen formelt sett en ren mengdeteoretisk sats og kan formuleres uten bruk av noen ikke-logiske predikater utenom de rent mengdeteoretiske. Teoremet er dette:

Teorem 19.1: Anta X er en ikke-tom mengde og at C er en funksjon der Dom(C) Inkl Pt(X)^2 og Rgn(C) Inkl [0,1]. Anta C oppfyller kravene C3 - C10 nevnt i §16. Anta videre at C oppfyller følgende krav i tillegg, nemlig

(i) $(Ey)(\langle y,X\rangle \hat{e} Dom(C))$

(ii) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow \langle x,X\rangle,\langle y,X\rangle \hat{e} Dom(C) \,\&\, C(y,X)>0$

Gitt at disse forutsetningene holder har man at følgende gjelder:

(a) Definer:

$\sigma(X) = Mg(y: \langle y,X\rangle \hat{e} Dom(C))$

$p(X) = Mg(\langle y,C(y,X)\rangle: \langle y,X\rangle \hat{e} Dom(C))$

Da har man at $\langle X,\sigma(X),p(X)\rangle$ er et endelig-additivt sannsynlighetsrom.

(b) Definer C* ved

$C^* = Mg(\langle\langle x,y\rangle, p(X)(x\Omega y)/p(X)(y)\rangle: p(X)(y)>0 \,\&\, x,y \hat{e} \sigma(X))$

Da har man at C*=C.

Bevis: *Ad (a)*: Vi skal vise at $\langle X,\sigma(X),p(X)\rangle$ slik det er definert i teoremet er et sannsynlighetsrom. Fra forutsetning (i) følger at $\langle y,X\rangle \hat{e} C$ for noe y. Siden C oppfyller kravet C5 følger da at $\langle X,X\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette og definisjonen av $\sigma(X)$ følger (1) $X \hat{e} \sigma(X)$. Anta $x,y \hat{e} \sigma(X)$ for vilkårlige x,y. Det følger da fra definisjonen av $\sigma(X)$ at $\langle x,X\rangle \hat{e} Dom(C)$ og at $\langle y,X\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette og det at C oppfyller kravet C4 følger $\langle xUy,X\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette og definisjonen av $\sigma(X)$ følger så $xUy \hat{e} \sigma(X)$. Vi har altså at

(2) $(Ax)(Ay)(x,y \hat{e} \sigma(X) \rightarrow (xUy) \hat{e} \sigma(X))$

Anta $x \hat{e} \sigma(X)$. Da har man ved hjelp av definisjonen av $\sigma(X)$ at $\langle x,X\rangle \hat{e} Dom(C)$. Siden C oppfyller kravet C4 kan man da slutte $\langle X\text{-}x,X\rangle \hat{e} C$. Fra dette følger $(X\text{-}x) \hat{e} \sigma(X)$. Vi har derfor vist at (3) $(Ax)(x \hat{e} \sigma(X) \rightarrow (X\text{-}x) \hat{e} \sigma(X))$. Fra (1) - (3) følger det at $\sigma(X)$ er endelig-additiv boolsk algebra over X.

Vi må vise at p(X) er et endelig additivt sannsynlighetsmål over X. Fra definisjonen av p(X) har man at (4) $(Ay)(\langle y,X\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow p(X)(y) = C(y,X))$. Fra forutsetning (i) følger at $\langle y,X\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette og C5 følger $\langle X,X\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette, (4) og C6 følger (5) $p(X)(X)=1$. Anta (6) $x,y \hat{e} \sigma(X) \,\&\, x\Omega y=\emptyset$. Da har vi ved hjelp av definisjonen av $\sigma(X)$ at (7) $\langle x,X\rangle,\langle y,X\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra (6),(7) og det at C oppfyller kravet C7 har man:

(8) $C(xUy,X)= C(x,X)+ C(y,X)$. Fra (7) og (4) følger: (9) $p(X)(x)= C(x,X)$ og (10) $p(X)(y)=C(y,X)$. Siden $x,y \hat{e} \sigma(X)$ har vi også $xUy \hat{e} \sigma(X)$ og derfor $\langle xUy,X\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette og (4) følger $p(X)(xUy)=C(xUy,X)$. Fra dette, (8), (9) og (10) følger så (11) $p(X)(xUy)= p(X)(x)+p(X)(y)$. Vi har dermed vist at p(X) er et endelig-additivt sannsynlighetsmål over X. Dermed har vi vist at $\langle X,\sigma(X),p(X)\rangle$ er et endelig additivt

© Morten Harboe Rognes 2013

sannsynlighetsrom. Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Anta for vilkårlige x,y,a at (1) <<x,y>,a>êC. Da har man (2) C(x,y)=a og også at (3) <x,y>êDom(C). Det følger da ved hjelp av forutsetning (ii):

(4) <x,X>,<y,X>êDom(C) & C(y,X)>0. Fra (4) følger ved hjelp av C3 og C4: <xΩy,X>êDom(C). Det følger da ved hjelp av definisjonen av σ(X) at

(5) yêσ(X) og xΩyêσ(X). Det følger også ved hjelp av definisjonen av p(X):

(6.1) p(X)(xΩy) = C(xΩy,X)

(6.2) p(X)(y) = C(y,X)

Siden C(y,X)> 0 har vi (7) p(X)(y)>0. Ved hjelp av C10 har man fra (4)

(8) C(xΩy,X)= C(x,yΩX)* C(y,x)

Men yêσ(X) Inkl Pt(X). Det følger at y Inkl X og derfor y=yΩX. Fra dette og (8) følger:

(9) C(xΩy,X) = C(x,y)*C(y,X).

Da, siden C(y,X)>0, har vi i lys av (2), (6.1), (6.2) og (9):

C(x,y) = p(X)(xΩy)/p(X)(y) =a. Fra dette kan vi slutte <<x,y>,a>êC*

Anta på den annen side at <<x,y>,a>êC*. Det følger da ved hjelp av definisjonen av C* at (10) x,yêσ(X)& p(X)(y)>0 og (11) p(X)(xΩy)/p(X)(y)=a Ved hjelp av definisjonen av σ(X) følger fra (10) at (11) <x,X>, <y,X>êDom(C). Videre følger fra den andre konjunkten i (10) at (12) C(y,X)>0. Fra (11) og (12) kan vi slutte, siden C forutsettes å oppfylle kravet C10 at (13) C(xΩy,X) = C(x,yΩX)* C(y,X). Nå har man y Inkl X siden yêσ(X). Vi har derfor y=yΩX. Fra dette og (13) følger

(14) C(xΩy,X) = C(x,y)* C(y,X)

I lys av definisjonen av p(X) har vi

(15) p(X)(y) = C(y,X) & p(X)(xΩy)= C(xΩy,X) fordi xΩyêσ(X) og yêσ(X). Fra (11), (14) og (15) følger, siden C(y,X)>0 ifølge (12):

C(x,y) = C(xΩy,X)/c(y,X)= p(X)(xΩy)/p(X)(y) =a

Men herav følger: <<x,y>,a>êC. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED**.

Vi skal også bevise et teorem som i en viss forstand representerer omvendingen av Teorem 19.1. I Teorem 19.1 tar vi utgangspunkt i en relativ sannsynlighetsfunksjon C og viser hvordan man kan konstruere et kanonisk sannsynlighetsrom og en kanonisk relativ sannsynlighetsfunksjon som sammenfaller med C. I det følgende teorem tar vi utgangspunkt i et sannsynlighetsrom S og viser hvoran man kanonisk kan konstruere en relativ sannsynlighetsfunksjon C og dernest ved hjelp av denne sannsynlighetsfunksjonen kan kanonisk konstruere et sannsynlighetsrom S' som man kan vise at er identisk med S.

Teoremet er dette:

Teorem 19.2: Anta <X,σ,p> er et endelig additivt sannsynlighetsrom. Definer C ved

C= Mg(<<x,y>,a>:x,yêσ & aêReell & p(y)>0 & a=p(xΩy)/p(y))

Da gjelder:

(a) C er en funksjon som oppfyller følgende krav:

(i) Dom(C) Inkl Pt(X)xPt(X) & Rgn(C) Inkl [0,1]

(ii) Kravene C3 - C10 i §16

(iii) (Ey)(<y,X>êDom(C)

(iv) <x,y>êDom(C) →. <x,X>,<y,X>êDom(C) & C(y,X)>0

© Morten Harboe Rognes 2013

(b) Definerer man nå σ* og p* ved:
(i) σ* = Mg(x: <x,X>êDom(C))
(ii) p*= Mg(<x,y>: y= C(x,X))
Da har man at <X,σ*,p*>= <X,σ,p>.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.

Ad (a): Vi skal ikke gi noe detaljert bevis for underpunktene (i) og (ii) under (a). Det er ganske lett å se fra definisjonen av C at Dom(C) Inkl Pt(X)xPt(X) og at Rgn(C) er inkludert i [0,1]. At C slik aom definert i teoremet oppfyller kravene C3 - C10 bevises hovedsakelig på samme måte som i beviset for Teorem 15.1 i §15. Vi skal imidlertid gi bevis for punkt (iii) og (iv). La oss først ta for oss punkt (iii). Vi har siden <X,σ,p> er et sannsynlightsrom at p(X)=1. Videre har vi at X,XΩXêσ og derfor at p(XΩX)/p(X)=1êReell. Det følger fra dette og definisjonen av C at <X,X>êDom(C) og derfor at (Ey)(<y,X>êC).

La oss dernest gi bevis for punkt (iv). Anta (1) <x,y>êDom(C). Fra definisjonen av C følger det da at det finnes a slik at (2) x,yêσ & aêReell & p(y)>0 & a=p(xΩy)/p(y). Siden σ er en naturlig boolsk algebra over X har vi at Xêσ og derfor at (3) xΩX, yΩXêσ. Videre har vi at siden yêσ Inkl Pt(X) at y Inkl X og derfor at yΩX=y. Fra dette og (2) følger (4) p(yΩX)>0. Siden p er et sannsynlighetsnål over X har vi også (5) p(X)=1>0. Det følger at det finnes b slik at bêReell & b= p(yΩX)/p(X) >0. Vi har derfor, når vi samler sammen det vi har vist, at (6) y,yΩXêσ & bêReell & p(X)>0 & b= p(yΩX)/p(X)>0. Fra dette og definisjonen av C følger <y,X>êDom(C) & C(y,X)>0. Siden vi også har at x,Xêσ følger x,xΩXêσ & p(X)>0 & p(xΩX)/p(X) =c for noe cêReell. Det følger fra dette og definisjonen av C at <x,X>êC. Dette viser at underpunkt (iv) under punkt (a) holder. Vi har dermed gitt et bevis for punkt (a).

Ad (b): Det vil være tilstrekkelig å bevise at σ*=σ & p*=p. La oss først vise at (1) σ*=σ. Anta for vilkårlig x at xêσ*. Fra definisjonen av σ* følger da <x,X>êC. Fra dette og definisjonen av C følger eksistensen av a slik at

(2) x,Xêσ & aêReell & p(X)>0 & a=p(xΩX)/p(X)

Men herav følger trivielt xêσ. Vi har derfor vist σ* Inkl σ. Anta på den annen side, for vilkårlig x, at xêσ. Man har Xêσ og derfor at x, xΩXêσ. Siden <X,σ,p> er et endelig-additivt sannsynlighetsrom har man at p(X)=1>0 siden xΩXêσ har man at xΩX er med i domenet til p og derfor at p(xΩX)>=0. Det følger at det finnes a slik a=p(xΩX)/p(X). Fra alt dette og definisjonen av C følger <x,X>êDom(C) og derfor xêσ*. Dette viser at σ Inkl σ*. Det følger at (1) holder.

Vi må også vise at p* = p. Anta først at <x,a>êp*. Fra dette og definisjonen av P* følger a=C(x,X). Fra dette og definisjonen av C følger

x,Xêσ & aêReell & p(X)>0 & a=p(xΩX)/p(X). Nå har man at p(X)=1 og derfor at a=p(xΩX). Men xêσ Inkl Pt(X). Det følger at x Inkl X og derfor at xΩX=x. Det følger at a=p(x) og derfor at <x,a>êp. Dette viser p* Inkl p. Anta på den annen side at <x,a>êp for vilkårlige x,a. Da har man siden <X,σ,p> er et sannsynlighetsrom at xêσ & p(x)=a. Siden Xêσ har vi x,xΩXêσ og siden p(X)=1 & xΩX=x følger a=p(xΩX)/p(X). Det følger da ved hjelp av definisjonen av C at C(x,X)=a og derfor at <x,a>êp*. Dette viser at p inkl p*. Vi har dermed vist at p*=p. Dette viser at punkt (b) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

© Morten Harboe Rognes 2013

§20 Oppsummering og avsluttende bemerkninger

Vi har i Del I av dette arbeidet fremstilt en teori om akseptanse, mer presist en teori om akseptanserelasjonen "x er et utsagn som bør aksepteres relativt til utsagnet y". I første omgang fremla vi teorien B;1, en utvidelse av egenskapsteorien E;3, en egenskapsteori vi har undersøkt i tidligere arbeider. Teorien B;1 fremkom ved at vi utvidet språket til denne egenskapsteorien med predikatet "x er et utsagn som bør aksepteres relativt til utsagnet y". I dette mer omfattende språk formulerte vi tolv grunnsetninger, nemlig B1 - B12. Teorien B;1 fremkom ved at egenskapsteorien E;3, med språket utvidet slik som nevnt, ble utvidet med disse tolv aksiomene B1 - B12 som nye ikke-logiske aksiomer. Vi spesifiserte også tre andre teorier, delvis innenfor det samme språk som B;1, men også innenfor en andre språkrammer. Det dreide seg om teoriene B;1*, B;2 og B;2*. Vi viste at alle disse teoriene var ekvivalente. Dypere sett kan de derfor sies å definere den samme teorien om akseptansserelasjonen. Dette sammen med drøftelsen av tre svakere teorier, samt en del andre temaer, også viktige, utgjorde hovedinnholdet i Del I.

I Del II spesifiserte vi i første omgang en teori, vi kalte den C;1, for predikatet "z er den grad av rasjonell troverdighet som bør tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y". Språket til denne teorien var språket til egenskapsteorien E;3 utvidet med dette predikatet. De grunnleggende aksiomene i teorien C;1 var C1 - C10. Disse aksiomene angir de grunnleggende egenskapene til den relative troverdighetsfunksjonen C. Domenet til denne funksjonen var inkludert i UxU, verdiområdet var inkludert i intervaller [0,1]. I Del II gikk vi også et steg videre og studerte en syntese av teoriene B;1 og C;1. Resultatet var teorien BC;1. I denne teorien finnes imidlertid ingen grunnsetninger som forbinder akseptansepredikatet med predikatet "z er den grad av rasjonell troverdighet som bør tilskrives utsagnet x relativt til utsagnet y". Vi gikk derfor videre og spesifiserte ytterligere tre grunnsetninger C11, C12 og C13 som fastlegger relasjonene mellom disse to predikatene. Resultatet, når BC;1 ble utvidet med disse aksiomene, var teorien BC;2. Aksiomene C11 - C13 var ikke vilkårlig valgt ut. Innen for BC,2 viste vi at det lar seg gjøre å definere hva vi kalte en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom. Vi viste dessuten at den relative sannsynlighetsfunksjonen som inngikk som siste komponent i denne preferansestrukturen kunne vises å være identisk med C. Tidligere i Del II viste vi dessuten at dersom <I,R,<N(R,w),σ(w),p(w)>/wêI/, C*> var en preferansestruktur med indekserte sannsynlighetsrom, og man definerte relasjonen Ba på vanlig måte ved hjelp av relasjonen R ,ville strukturen utgjøre en naturlig modell for BC;2.

Vi har så langt gjort rede for de viktigste resultatene i Del I og Del II.

Vi vil nå kort gjøre rede for innholdet i den resterende del av denne siste paragrafen. I forbindelse med akseptanserelasjonen gjenstår det å utdype ytterligere akseptansepåstandenes aprioriske og apodiktiske natur. Videre bør forholdet mellom sannhet på den ene side og aksepterbarhet på den annen side klargjøres. Dessuten vil det vær på sin plass å utdype, mer enn det vi faktisk har gjort, hva som bør aksepteres relativt til den totale evidens som foreligger ved et gitt tidspunkt. Dette spørsmål kan i sin tur deles opp i en mer generell og en mer spesiell del. Når det gjelder forholdet mellom akseptanse og troverdighetsgrad vil også dette bli utdypet ytterligere.

De grunnleggende aksiomene i akseptanseteorien B;1 er åpenbart ikke analytiske setninger. Det ville være tøvete å si at de kunne transformeres til rent predikatlogiske sannheter ved å

© Morten Harboe Rognes 2013

erstatte uttrykk med synonyme uttrykk. Det samme gjelder også de grunnsetningene i teorien som er av en mengdeteoretisk, utsagnsteoretisk og egenskapsteoretisk natur. Ingen av disse setningene er analytiske i noen som helst rimelig betydning av uttrykket "analytisk setning". Hvis man derfor opprettholder et skille mellom analytiske og syntetiske setninger, noe som er helt berettiget, i det man kan definere "analytisk setning" slik som antydet ovenfor, følger det at nær sagt alle grunnsetningene i teorien B;1, bortsett fra de rent logiske aksiomene, er syntetiske. Siden det samtidig er åpenbart at disse setningene har en nødvendig karakter, og det ville være fullstendig misforstått å tenke seg at de kan rettferdiggjøres ved obervasjoner, eksperimenter eller ved andre erfaringsmessige undersøkelser, følger det at setningene er apriori sanne. Det følger derfor at teorien B;1, såvel som egenskapsteorien E;3 og utsagnsteorien T;1, i alt vesentlig inneholder generelle setninger som er syntetisk apriori. Nøyaktig det samme kan sies om grunnsetningene i teoriene C;1, BC;1 og BC;2.

Ikke bare er de generelle hovedgrunnsetningene i BC;1 syntetisk apriori utsagn. Dette gjelder også individuelle utsagn av typen Ba(x,y) og C(x,y)=a der a er et reellt tall. Er slike setninger sanne er de nødvendig sanne. Er de usanne er de nødvendigvis usanne. Det følger fra dette at dersom en induktiv slutning av typen <Δ,x> er akseptabel er påstanden at den er akseptabel syntetisk apriori. Videre følger det at dersom den faktisk er akseptabel så er det logisk nødvendig at den er akseptabel. Tilsvarende om <Δ,x> er en induktiv slutning med en viss grad av troverdighet b. Har den denne grad av troverdighet er dette nødvendigvis tilfelle. Er det usant at at den har denne grad av troverdighet er det nødvendigvis usant. Ingen påstander om akseptabiliteten eller graden av troverdighet til induktive slutninger kan bekreftes eller avkreftes ved observasjoner eller empiriske slutninger. Det er snarere det motsatte som er tilfelle. Kunne man ikke skille mellom hvilke induktive slutninger som er akseptable, og hvilke som ikke er det, er det umulig å skjønne hvordan man i det hele tatt kan observere, foreta noe eksperimenter eller gjøre noen empiriske undersøkelser.

La oss nå gå over til forholdet mellom akseptanse og sannhet. Fra det at man bør akseptere utsagnet x relativt til utsagnet y, der utsagnet y er sant, følger det ikke at x er et sant utsagn. Det kan for visse utsagn y faktisk være slik at alt det man bør akseptere relativt til y utelukkende er sannheter. Imidlertid er det intet som logisk sett tilsier at dette er tilfelle. Det er heller ikke noe i teorien B;1 som peker i en annen retning. Hvis man tenker seg at a0 er den aktuelle verden er det fullt ut forenelig med B;1 å forestille seg at vi har for oss to utsagn y1 og y2, der y2 impliserer y1, ie. μ(y2) Inkl μ(y1), hvor begge utsagn er akseptansebaser, hvor begge utsagnene er sanne i a0, men hvor man likevel har at ¬(a0êμ(SNu(Mg(x: Ba(x,y1))))) samtidig som det holder at a0êμ(SNu(Mg(x: Ba(x,y2))))). I dette tilfelle er det, som man ser, slik at konjunksjonen av alt som bør aksepteres relativt til y1 ikke er sann, mens derimot konjunksjonen av alt som bør aksepteres relativt til y;2 faktisk er sann[13]. Det følger fra dette at man bør skille skarpt mellom det at x er et utsagn som bør aksepteres relativt til det sanne utsagn y og det at x er et sant utsagn.

Dersom man bør akseptere et utsagn x relativt til utsagnet y følger det at man relativt til y bør forkaste alle utsagn som strider mot x. Dette er en enkel konsekvens av det forhold at dersom

13 Det er ikke vanskelig å finne en modell som oppfyller disse kravene. Anta wêI & wR*a0 der a0 er den virkelige verden. Betrakt N(R,w) og N(R,a0). Sette pr definisjon y1= μ;-1(N(R,w)U N(R,a0)) og y2 = μ;-1(N(R,a0)). Da har man at Ba(y1,y2). Videre a0 ⊨ y1 og a0 ⊨y2. Men vi har likevel at μ(SNu(Mg(z: Ba(z,y1)))) = N(R,w1) er disjunkt med μ(SNu(Mg(z: Ba(z,y1)))) = N(R,a0). Vi har derfor at ¬[a0 ⊨ SNu(Mg(z: Ba(z,y1)))] og a0 ⊨ SNu(Mg(z: Ba(z,y2)))

© Morten Harboe Rognes 2013

noe bør aksepteres relativt til y må utsagnsmengden som består av y og alt det som bør aksepteres relativt til y være en konsistent utsagnsmengde. La e(t) være den totale evidens som foreligger i den aktuelle verden ved tidspunktet t[14]. Anta nå at T er en teori som bør aksepteres relativt til e(t). Vi forutsetter altså at Ba(SNu(T), e(t)). Anta videre at t <;f t' og at μ(e(t')) SInkl μ(e(t)). Det følger da at *relativt til e(t)* bør man ikke akseptere at den mer omfattende evidensmengden e(t') strider mot teorien T. Dette følger fra den mer generelle satsen vi nevnte ovenfor. Naturligvis bør man heller ikke akseptere e(t') relativt til e(t) for noe t'>;f t dersom e(t') er inkonsistent med T.

Dette har visse konsekvenser i forbindelse med vitenskapelige teorier. La e(t) være den totale evidens som foreligger ved det nåværende tidspunkt. "t" betegner altså det nåværende tidspunkt. La N være den påstand at Newtons lover er tilnærmelsesvis riktige innenfor de grenser som den moderne fysikk setter. Det kan da virke ytterst plausibelt, antageligvis kan man ta det for gitt, at N bør aksepteres relativt til e(t). Man har med andre ord at Ba(N,e(t)). Fra det som har blitt nevnt ovenfor følger det da at man ikke relativt til *den totale evidens vi har nå* bør akseptere at noen, hverken i nær eller fjern fremtid, vil gjøre eksperimenter eller observasjoner som er uforenelig med den påstand at Newtons lover, innen viss grenser, er tilnærmelsesvis riktige. Dette forhindrer naturligvis ikke at det er logisk mulig at man ved et fremtidig tidspunkt kan gjøre observasjoner som strider mot N. Fra en setning av typen Ba(T, e(t)) kan man selvfølgelig ikke slutte at Ba(T, e(t')) for alle t'>;f t.[15]

Hva vi har sagt om akseptabiliteten til den påstand at Newtons lover er tilnærmet riktige relativt til den totale eviens som foreligger ved det nåværende tidspunkt gjelder også andre vitenskapelige teorier på fysikkens og naturvitenskapens område. Der er neppe noen som helst seriøs grunn til å benekte at den geometriske optikks lover, termodynamikkens lover, Maxwells lover osv. bør aksepteres relativt til den totale evidens som foreligger ved det nåværende tidspunkt. Konklusjonen blir derfor den samme også i forbindelse med disse teoriene: På basis av den *totale nåværende evidens* bør man ikke akseptere at den totale

14 Man kan neppe definere termen "e(t)" innenfor rammen av B;1 eller for eksempel den mer omfattende teorien BC;2. Vi tenker oss imidlertid her at språket til de teoriene vi har studert utvides med de tidsteoretiske predikatene "x er et tidspunkt", "tidspunktet x kommer før tidspunktet y" og "tidspunktet y kommer z minutter etter tidspunktet x". T betegner mengden av tidspunkter og <;f betegner relasjonen mellom to tidspunkter x og y der x kommer før y. Man må også tenke seg at vi innfører predikatet "utsagnet y beskriver et forhold som x observerer at foreligger ved tidspunktet t i verdenen w". Dette forkortes med uttrykket "Obs;(w,t)(y,x)". Gitt at vi har utvidet språket med disse predikatene kan uttrykket "e;w(t)", den totale evidens som foreligger ved tidspunktet t i verdenen w, defineres slik:

e;w(t) = SNu(Mg(y: (Ex)(Et')(t'êT & t'=<;f t & Obs(w,t')(y,x))))

Man ser fra denne definisjonen av den totale evidens som foreligger ved tidspunktet t i verdenen w er konjunksjonen av alle de utsagn som beskriver forhold som en eller annen observerer at er tilfelle ved et eller annet tidspunkt t' i verdenen w og der tidspunktet t' enten kommer for t eller er identisk med t. Når vi i det følgende bruker uttrykket "e(t)" uten å nevne noen mulig verden er det underforstått at den mulige verden det dreier seg om er den virkelige verden, som vi betegner med "a0".

Man har fra denne definisjonen, om wêI, at μ(e;w(t)) Inkl μ(e;w(t')) om t<;f t'. Men man kan ikke uten videre fra den definisjonen vi har gitt slutte at denne inklusjonen er streng. Har man for alle t' >=;f t0 at ¬(Ey)(Ex)(Obs;(w,t')(y,x)) følger det at μ(e;w(t0)) = μ(e;w(t')). Man bør også bemerke at w ⊨e;w(t) for alle têT siden det åpenbart gjelder i forbindelse med predikatet "Obs;(w,t)(y,x)" at følgende holder:

Obs;(w,t)(y,x) → w ⊨y. Med andre ord observerer man at noe er tilfelle er det man observerer tilfelle.

15 Det er imidlertid ikke utelukket at noen teorier T kan være "resistente" i denne forstand. Har man ø≠Max(R,μ(e(t'))) SInkl Max(R,μ(e(t0))) for alle t' >;f t0 vil man ha, om man har Ba(T, e(t0))), at også Ba(T,e(t')) holder for alle t>;f t0. Forutsetter man dette bør det også bemerkes at det da alltid vil finnes teorier man bør akseptere på et senere tidspunkt, men som man ikke bør akseptere ved noe tidligere tidspunkt. Dette vil svare til en kumulativ, ikke-abrupt og kontinuerlig, vekst i vårt virkelighetsbilde.

© Morten Harboe Rognes 2013

evidens ved noe fremtidig tidspunkt strider mot disse teoriene. Det synes som om dette er så langt man kan komme om man hevder at det virkelighetsbilde fysikken gir i en viss forstand representerer sikker kunnskap. Men som nevnt ovenfor, fra det at dette virkelighetsbilde bør aksepteres relativt til en totale evidens som foreligger i dag følger det ikke at det vil være akseptabelt relativt til den totale evidens som foreligger i morgen, eller for den saks skyld om hundre eller om fem-hundrede år. I denne forstand er de vitenskapelige teorier man gir sin tilslutning alltid tentative.

Vi har ovenfor kommentert forholdet mellom akseptanse og sannhet. La oss før vi går videre også si noen ord om forskjellen mellom viten og det at noe bør aksepteres. Hvis et individ x ved tidspunktet t vet at utsagnet y er sant virker det høyest rimelig å hevde at utsagnet y bør aksepteres relativt til den totale evidens som foreligger ved tidspunktet t. Man kan uttrykke dette ved å si at det faktum at utsagnet y bør aksepteres relativt til den totale evidens som foreligger ved tidspunktet t er en nødvendig betingelse for at noen ved tidspunktet t skal vite at utsagnet y er sant. Dette kan imidlertid ikke være tilstrekkelig. Grunnen er at Ba(y,e(t)) ikke impliserer at utsagnet y er sant selvom påstanden e(t) er sann. Uansett hvordan man analyserer viten innebærer det at en eller annen vet at utsagnet y er sant at dette utsagnet y må være sant. Derfor kan det at Ba(y,e(t)), selvom man supplerer det med den premiss at x tror ved tidspunktet t at utsagnet y er sant, ikke implisere at x vet ved tidspunktet t at utsagnet y beskriver et faktisk foreliggende forhold. At utsagnet y bør aksepteres reltivt til utsagnet x innebærer at det er fornuftig å tro at utsagnet y beskriver et foreliggende forhold gitt at utsagnet x representerer all den evidens man har. Det innebærer imidlertid ikke at x representerer definitiv evidens for y, eller at utsagnet x impliserer y.

Etter at vi nå har sett på visse sider ved akseptanserelasjonen Ba skal vi kommentere visse sider ved teorien om troverdighetsgrad. Aller først vil vi understreke at man i en viss forstand ikke bør undervurdere teoriene C;1, BC,1 og BC;2. I for eksempel teorien C;1 kan alle de vanlige begrepene i den rent matematiske sannsynlighetsteorien innføres, og teorien C;1 kan derfor utvikles på den måten som er vanlig i alle gjengse lærebøker i sannsynlighetsteori. Alt det man for eksempel kan bevise om forskjellige sannsynlighetsfordelinger skulle kunne behandles på tilsvarende vis innenfor rammen av C,1, eller for den saks skyld teorien BC;2.

En annen side ved de teoriene vi har fremlagt, for eksempel BC;2, er at det dreier seg om svært generelle teorier. I ingen av disse teoriene om troverdighetsgrad kan man bevise noen individuelle påstander om sannsynlighet av typen C(x,y)=a der a er et konkret reellt tall og x,y er konkrete, spesifikke utsagn. I dette henseende kan teoriene karakteriseres som meget svake. Den typen satser som kan utledes i teorien, og som tillegger for eksempel et konkret utsagn x en spesifikk troverdighetsgrad relativt til et annet konkret utsagn y vil hovedsakelig være svært betingede satser av typen "Hvis x,y,a er entiter, der x,y er utsagn og a et reellt tall, som oppfyller betingelsen F(x,y,a) så har man C(x,y)=a" der forutsetningene i satsene vil være mer eller mindre kompliserte. Vi skal gi noen eksempler på dette og herunder komme inn på hva slags utsagn det gir mening å tillegge en sannsynlighet, eller en grad av troverdighet, relativt til den totale evidens som foreligger.

Det første eksemplet er av en mer abstrakt og generell natur. Anta (i) at Δ er en ikke-tom mengde av utsagn og at Γ er en tellbart additiv σ-algebra over mengden av de konsistente tilstandsbeskrivelsene over Δ.. Sett per definisjon $\Delta^* = Mg(UNu(x): x\hat{e}\Gamma)$. Definerer man da g ved: $g = Mg(<UNu(x),x>: x\hat{e}\Gamma)$ kan man uten spesielle vanskeligheter vise at g er en funksjon som avbilder Δ^* en-entydig på Γ og dessuten at g er en isomorfi mellom Δ^* og Γ.

© Morten Harboe Rognes 2013

Anta videre (ii) at y0 er et utsagn og at man har (Ax)(xêΔ* → <x,y0>êDom(C)).

Gitt disse forutsetningene kan man selvfølgelig slutte at C(x,y0)ê[0,1] for alle xêΔ*. Definerer man videre en funksjon p ved p(x) = C(x,y0) for xêΔ* vet man, på basis av aksimene i C;1, at p er et tellbart additivt sannsynlighetsmål over Δ*. Imidlertid er det bare om man legger til en hel rekke langt sterkere forutsetninger at man eventuelt kan utlede noen numeriske resulater angående troverdighetsgraden til individuelle utsagn i Δ*. La oss anta (iii) at B er mengden av alle Borel-mengder over intervallet [0,a] der a>0. Dette vil være en tellbart additiv σ-algebra over [0,a]. Anta videre (iv) at σ-algebraen B er isomorf med σ-algebraen Γ og at φ er denne isomorfien mellom B og Γ.

Da vil det for eksempel til ethvert intervall av typen [c,d], der 0 =<c<d<=a, svare et bestemt utsagn i Δ*, nemlig utsagnet g;-1(φ([c,d])). Tilsvarende vil ethvert utsagn x i Δ* være en-entydig assosiert med et intervall i B, nemlig φ;-1(g(x)).

Anta nå at (v) f er en kontinuerlig, integrerbar funksjon over intervallet [0,a] og at INT/x,0,a/(f(x))dx =1[16]. Da vil ethvert element y i B bli tilordnet måltallet INT/y/(f)[17]. La oss nå ytterligere forutsette at (vi) (Ax)(xêΔ* → C(x,y0) = INT/φ;-1(g(x))/(f). Gitt denne og de tidligere forutsetningene kan man i prinsippet beregne rent matematisk troverdighetsgraden til ethvert utsagn i Δ* relativt til gitt at man kunne angi f ved en eller annen matematisk formel.

La oss derfor, for eksemplets skyld, forutsette (vii) at f er en konstantfunksjon over [0,a] som tilordner ethvert tall x i dette intervallet verdien 1/a. f er med andre ord en helt uniform sannsynlighets fordeling over [0,a].

Gitt disse forutsetningene (i) - (vii) ovenfor kan man trekke en rekke slutninger om sannsynlighetene til utsagnene i Δ* relativt til utsagnet y0:

Er 0=<c1 < c2 =<a har man, om x= g;-1(φ([c1,c2)) at C(x,y0)= 1/a*(c2-c1). Har man videre at 0=<c1 < c2 =<a & 0=<d1 < d2 =<a og dessuten at x1= g;-1(φ([c1,c2)), x2= g;-1(φ([d1,d2)) og dessuten at d2-d1= 2*(c2-c1) følger C(x2,y0)=2*C(x1,y0).

Dette viser at man på basis av aksiomene i C;1 kan utlede en rekke setninger om de numeriske verdier til sannsynligheten til diverse utsagn om man gjør en lang rekke mer eller mindre sterke forutsetninger. Vi bemerker også at konjunksjonen av alle de forutsetningene vi gjorde ovenfor nemlig (i) - (vii) er konsistente med teorien C;1. De vil også være konsistente med teoriene BC;1 og BC;2.

Det eksempel vi ga ovenfor er helt abstrakt og generelt. Vårt neste eksempel er helt konkret og relativt realistisk. Vi antar nå, slik som tidligere, at e(t0) er den totale evidens som foreligger ved det nåværende tidspunkt som vi betegner med t0. Vi antar videre at det inngår i denne totale evidens at L er en lyspære som ikke har vært tilsluttet noen strømkilde og at den ved tidspunktet 0 ble tilsluttet en strømkilde. Dessuten antar vi at det er logisk umulig at denne lyspæren L kan lyse mer enn i a timer. Endelig antar vi at man ikke på basis av e(t) kan slutte noe som helst om hvor lenge denne lyspæren vil lyse.

La oss nå betegne utsagnet at lyspæren L slukner ved tidspunktet t med "s(t)". Vi betegner utsagnsmengden Mg(s(t): tê[0,a]) med Δ. Det skulle da umiddelbart være klart at alle utsagnene i Δ er innbyrdes uforenelige og at hvert av disse utsagnene er logisk konsistent og også konsistent med e(t). Det skulle også være klart, i lys av at det er logisk nødvendig at lyspæren slukner før eller eventuelt ved tidspunktet a at unionen av utsagnene i Δ er det nødvendig sanne utsagn. La nå B være mengden av Borel-mengder over intervallet [0,a], dvs.

16 Uttrykket "INT/x,0,a/(f(x))dx" leses "integralet av f(x) for x lik 0 til a".
17 Uttrykket "INT/x/(f)" leses "Integralet til funksjonen f over området x".

© Morten Harboe Rognes 2013

den minste mengden som inneholder alle intervaller av typen [c1,c2], [c1,c2>, <c1,c2] og <c1,c2>, der 0=< c1 =<c2 =<a, og som er lukket under tellbar union og komplementering med hensyn på [0,a]. Man ser at dette er en tellbart additiv σ-algebra over [0,a]. Er x et element i B vil UNu(Mg(s(t): têx)) være det utsagnet som sier at lyspæren L slukner ved et eller annet tidspunkt i mengden x. La oss nå definere Γ ved å sette

Γ=Mg(UNu(Mg(s(t):têx)): xêB)

Man kan da vise at Γ er lukket under tellbar union og negasjon, og dessuten at Δ Inkl Γ. Videre er det vesentlig å påpeke at utsagnene i Γ korresponderer en-entydig med elementene i B. Dette er fordi man har at sannhetsmengdene til s(t) og s(t') er disjunkte om t≠t' og t,t'ê[0,a].

Anta nå (i) at (Ax)(xêΓ → <x,e(t0)>êDom(C)), med andre ord at ethvert utsagn i mengden Γ kan tilordnes en grad av troverdighet relativt til den totale evidens som foreligger ved det nåværende tidspunkt t0. Dette er en realistisk antagelse. Vi skal videre anta at

(ii) f er en kontinuerlig og integrerbar funksjon over intervallet [0,a] som er slik at INT/x,0,a/(f(x)) dx =1.

Vi bemerker følgende: Setter man per definisjon φ(x) = UNu(Mg(s(t): têx) for alle xêB har man som vi nevnte φ: B -(1-1,på)→ Γ. Anta tilslutt (iii) at det følgende holder:

(Ax)(xêΓ → C(x, e(t0)) = INT/φ;-1(x)/(f).

Fra forutsetningene (i) - (iii) kan man trekke en rekke slutninger om sannsynlighetene til utsagnene i Γ relativt til den totale evidens som foreligger ved det nuværende tidspunkt, med andre ord e(t0). Kjenner man, og kan man gi et matematisk uttrykk for funksjonen f, og i dette tilfelle er det faktisk mulig, kan man kalkulere numeriske uttrykk for sannsynlighetene til de diverse enkelt utsagn i Γ relativt til e(t0).

Vi har valgt å fremstille dette eksemplet detaljert fordi beregning av sannsynlighet for levetiden til en lyspære ikke er noe som er grepet ut av løse luften, men er basert på statistiske lovmessigheter underbygget ved stokastiske eksperimenter. La oss si at man produserer tusen helt like lyspærer og kobler dem alle ved tidspunktet t til helt identiske strømkilder. Man kan da ikke på forhånd forutsi noe om hvor lenge hver enkelt lyspære vil vare. Man kan imidlertid registrere hvor lang tid det tar før hver enkelt lyspære slukner. Man kan så sette opp et histogram som viser hvor mange lyspærer som sluknet i løpet av den første timen, hvor mange som sluknet i løpet av den andre timen, osv. inntil man kommer til det tidspukt hvor alle har sluknet.

Det viser seg nå at når man gjentar dette eksperimentet et stort antall ganger med akkurat samme type lyspære og under de samme forutsetningene vil histogrammene for hvert eksperiment bli omtrent like slik at de tydelig viser en lovmessighet. Denne regelmessighet har en tydelig ikke-tilfeldig karakter. Det er en regelmessighet som man bør akseptere at vil fortsette i fremtiden. Det dreier seg med andre ord om en statistik lovmessighet, en statistisk lov.

Et tilsvarenede, men mer primitivt eksempel, på et stokastisk eksperiment ville være om la oss si tusen personer kastet mynt og krone samtidig, med mynter som var helt like og hvor massen var helt jevnt fordelt. Registrerte man alle de tilfellene der resultatet ble mynt og alle de tilfellene der resultatet ble krone ville man finne at antallet som fikk mynt og antallet som fikk krone ville være omtrent like stort. Tilsvarende om en og samme person kastet mynt og krone tusen ganger etter hverandre. Igjen ville antallet ganger vedkommende fikk mynt være omtrent like stort som antallet ganger vedkommende fikk krone som resultat. Også her er det tale om en genuin lovmessighet. På basis av den totale evidens som foreligger nå bør

© Morten Harboe Rognes 2013

man akseptere at denne lovmessighet også vil gjelde i fremtiden.

Alle disse eksperimentene er stokastiske eksperimenter, eller tilfeldighets-eksperimenter, fordi det er umulig å finne noen regel, eller strategi, som gjør det mulig å forutsi utfallene av de enkelte eksperimenter. Kaster man mynt og krone er det umulig å forutsi utfallet ved noen som helst form for beregning. Tenner man en lyspære er det umulig å forutsi på forhånd hvor lang tid det vil ta før den slukner på basis av noen kjente naturlover.

Det er bare når man bør akseptere at en statistisk lovmessighet foreligger på basis av den totale evidens man besitter ved et gitt tidspunkt, e(t), at man relativt til e(t) kan tilskrive visse hendelser en sannsynlighet på en måte som er vitenskapelig forsvarlig. Gitt at e(t) er den totale evidens som foreligger ved det nuværende tidspunkt. Gitt videre at e(t) impliserer at personen x0 kastet mynt og krone ved tidspunktet t'. Anta videre at man relativt til e(t) bør akseptere den statisktiske lovmessighet vi beskrev ovenfor vedrørende kast med mynter. Anta videre at e(t) ikke impliserer noe om utfallet da x0 kastet mynt og krone ved tidspunktet t'. Under disse omstendigheter er det rimelig å si at troverdighetsgraden til utsagnet at resultatet ble krone da x0 ved tidspunktet t' kastet mynt og krone er lik 1/2 relativt til e(t).

I en rekke situasjoner kan man ha på følelsen at sannsynligheten for visse hendelser fordeler seg på den og den måte, og man kan også i en del slike tilfelle henvise til observasjoner man har gjort som intuitivt sett støtter disse sannsynlighetsbetraktningene.

La oss se på et eksempel. Man har for seg en biltyv som skal løslates etter endt soning. Man spør om hvor stor sannsynligheten er for at vedkommende får et tilbakefall til biltyveri. La oss si at man har en statistikk for tilbakefallet til to hundrede biltyver for en tiårs-periode som viser at bare 10% ikke vendte tilbake til biltyverier etter 10 år. Videre sier statistikken at av dem som fikk tilbakefall var det 20% som fikk sitt første tilbakefall i løpet av de første to årene. 50% fikk sitt første tilbakefall i tidsperioden fra det tredje året begynte til slutten av det sjette året. Endelig fikk 30% sitt første tilbakefall i tidsperioden fra begynnelsen av det syvende året til slutten av det tiende året. En nærmere studium av statistikken for dem som fikk tilbakefall antyder en klokkeformet kurve der topp-punktet er skjøvet mot venstre. I en slik situasjon virker det ikke helt vilkårlig om man relativt til denne evidens vurderte sannsynligheten for at den tidligere biltyv ville få sitt første første tilbakefall i løpet av ti år til 9/10. Videre ville det ikke være fullstendig grepet ut av løse luften om man vurderte sannsynligheten for at vedkommende fikk sitt første tilbakefall i løpet av de første to år til 9/10*1/5, det vil si til 9/50.

Det er imidlertid en stor forskjell mellom dette siste eksemplet og de to foregående. I de to foregående eksempler var sannsynlighetstilordningene basert på demonstrerbare statistiske lovmessigheter. I det siste tilfellet synes de bare å være basert på statistikk. Det er vanskelig å se at kriminalstatistikker av den type som er antydet i dette siste eksemplet skulle avspeile genuine statistiske lovmessigheter.

I dette siste eksemplet kunne man si at de numeriske sannsynlighetsangivelsene som ble nevnt ikke var totalt vilkårlige. Det er imidlertid en kjennsgjerning at man er tilbøyelig til å snakke om sannsynligheter også i andre situasjoner hvor det er svært vanskelig å se at ma har noe statistisk grunnlag i det hele tatt for de sannynlighetsangivelsene man foretar. Spør man for eksempel om hva som er sannsynligheten for at min kone er hjemme eller ikke ved det nåværende tidspunkt ville det være til en viss grad vilkårlig om man sa at sannsynlighetene for disse to mulighetene var like store. Videre ville det være nokså vilkårlig, men kanskje ikke

© Morten Harboe Rognes 2013

helt, om man sa, i det tilfelle at hun var hjemme, at det var like sannsynlig at hun var inne i huset som utenfor huset. Og i tilfelle hun ikke var hjemme ville det være temmelig vilkårlig om man hevdet at sannsynligheten for at hun var på handletur var like stor som sannsynligheten at hun ikke var på handletur. I tilfeller av denne art kan en teori som C;1 ikke hjelpe en med annet enn å trekke riktige slutninger fra de initiale sannsynligheter man angir og dermed bidra til at de sannsynlighetsoppfatningene man har i det minste utgjør et konsistent system. Det virker svært vanskelig å se hvordan man kan fremsette sannsynlighetsangivelser av denne typen på noe annet en et rent skjønnsmessig, det vil si svært subjektivt, grunnlag. Det er imidlertid et faktum at man foretar slike vurderinger av sannsynligheter og at man ofte baserer sine beslutninger på dem.

Det siste temaet vi skal ta opp dreier seg om man kan tilskrive teorier som inneholder generelle lover noen sannsynlighet eller det vi har kalt grad av troverdighet. Utsagn med samme form og karakter som vitenskapelige lover synes å stå i en særstilling. Tenker man seg at e(t) er den totale evidens som foreligger ved det nåværende tidspunkt og at man tilskriver et generelt utsagn av lovkarakter en sannsynlighet som er større enn null, men mindre enn 1, relativt til e(t) vil man med en gang måtte spørre om på hvilken grunnlag man gjør dette. Det kan åpenbart ikke være på basis av noen statistiske regulariteter eller lovmessigheter som er implisert av e(t) eller som man bør akseptere relativt til e(t). Det eneste man eventuelt kunne peke på er at en lang rekke individuelle instanser av lovutsagnet er implisert av e(t). Man kunne peke på at disse bekrefter lovutsagnet, og at dersom vår totale evidens ved et senere tidspunkt inneholder flere slike instanser, og ellers intet som strider mot lovutsagnet, vil lovutsagnets sannsynlighet ha steget relativt til denne totale fremtidige evidens. Men hvordan fastsetter man den initiale sannsynlighet til lovutsagnene? Dette synes å være vilkårlig, og man kan knapt unngå å tro at det må være enda mer vilkårlig enn når en eller annen advokat på basis av psykologisk evidens om en klient vurderer sannsynligheten for at klienten vil begå en eller annen forbrytelse.

La oss se på hvordan dette problem fortoner seg når man tar sitt utgangspunkt i BC;2. I denne teorien inngår grunnsetningen C11 som kan formuleres således:

C11 $Ba(x,y) \& \langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow C(x,y)=1$

Aksiomet sier at dersom x er et utsagn som bør aksepteres relativt til utsagnet y og utsagnet x har en eller annen grad av troverdighet relativt til y, så er det slik at utsagnet x har en troverdighetsgrad lik 1 relativt til y. Man legger merke til forbeholdet om at $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ i denne satsen

La nå e(t) være den totale evidens som foreligger ved det nåværende tidspunkt t. Vi argumenterte tidligere for at for eksempel lovene i Einsteins relativitetsteori, la oss betegne konjunksjonen av disse lovene med E, burde aksepteres relativt til e(t). Fra dette og C11 følger at sannsynligheten til denne teorien E relativt til den totale evidens som foreligger er lik 1, såsant teorien kan tilskrives en eller annen sannsynlighet relativt til e(t). Hvis man derfor ønsker å tilskrive alle de vitenskapelige teorier som bør aksepteres relativt til den totale evidens som nå foreligger, og det dreier seg om svært mange teorier, en eller annen grad av sannsynlighet er det naturlig å tilskrive dem maksimal sannsynlighet, dvs. en sannsynlighet lik 1. Dette vil i henhold til teorien BC;2 bare være tilfelle dersom disse teoriene kan tilskrives

© Morten Harboe Rognes 2013

noen sannsynlighet. I motsatt fall bør disse teoriene ikke tilskrives noen sannsynlighet i det hele tatt.

Det er imidlertid et annet teorem i teorien BC;2 som også er relevant i denne forbindelse. Det dreier seg om den følgende sats:

(+) $(Ez)(\langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C)) \,\&\, Ba(x,y) \rightarrow C(K(x,y),y) = 1$

Det denne satsen sier er det følgende: Anta y er et utsagn relativt til hvilket man kan tilskrive et eller annet utsagn z en grad av troverdighet, og anta at x er et utsagn som bør aksepteres relativt til y. Da har konjunksjonen av x og y en rasjonell grad av troverdighet relativt til y som er lik 1. Siden det er ganske klart at visse utsagn bør tilskrives en sannsynlighet relativt til den totale evidens som foreligger nå, og det også er sant at E bør aksepteres relativt til denne evidens følger det ved hjelp av (+) at den rasjonelle grad av troverdighet til K(E,e(t)) er lik 1 relativt til e(t). Man ser at konjunksjonen av E og e(t) uten videre kan tilskrives en grad av troverdighet relativt til e(t) selvom E alene ikke uten videre kan tilskrives noen grad av troverdighet relativt til e(t).

Man kan vise at dersom $(Ez)(\langle z,x\rangle \hat{e} Dom(C))$ holder har man også at $(Ez)Ba(z,x)$, med andre ord at x representerer en akseptansebasis. Det omvendte holder imidlertid ikke. Det følger fra det at $(Ez)(\langle z,x\rangle \hat{e} Dom(C)) \rightarrow (Ez)Ba(z,x)$ holder og (+) at man har:

(++) $(Ez)(\langle z,x\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow C(K(SNu(Mg(y{:}Ba(y,x)),x), x)=1)$

Med andre ord er det slik at dersom et eller annet utsagn har en grad av troverdighet relativt til utsagnet x bør konjunksjonen av x og konjunksjonen av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til x tilskrives troverdighetsgraden 1 relativt til x.

Fra det vi har nevnt ovenfor følger det også at dersom en generell lov L bør aksepteres relativt til e(t), og det finnes utsagn som har en grad av troverdighet relativt til e(t), bør konjunksjonen av e(t) og enhver mindre generell lov som følger fra L tilskrives troverdighetsgraden 1, altså maksimal troverdighetsgrad, relativt til e(t)

Vi avslutter våre undersøkelser med å gi et bevis for tesen (+) ovenfor:

Teorem 20.1: Anta $x,y \hat{e} U$. Da har man:
$(Ez)(\langle z,x\rangle \hat{e} Dom(C)) \,\&\, Ba(y,x) \rightarrow C(K(y,x),x) = 1$

Bevis: Anta (1) $(Ez)(\langle z,x\rangle \hat{e} Dom(C))$ og (2) $Ba(y,x)$. Fra (1) følger at det finnes noe z slik at (3) $\langle z,x\rangle \hat{e} Dom(C)$. Definer nå:

(3.1) $N(R,w) = Mg(w'{:}\ w'L(R)\ w)$
(3.2) $\sigma(w) = Mg(x{:}\ \langle x, \mu;{-}1(N(R,w))\rangle \hat{e} Dom(C))$
(3.3) $p(w) = C(x, \mu;{-}1(N(R,w)))$ om $x \hat{e} \sigma(w)$

Da har man ved hjelp av Teorem 18.2 at følgende holder for alle x,y og a:

(3.4) $\langle\langle x,y\rangle,a\rangle \hat{e} C \leftrightarrow .\ x,y \hat{e} U \,\&\, a \hat{e} Reell \,\&$
$(Ew)[\ w \hat{e} Max(R,\mu(y)) \,\&\, \mu(x) \Omega N(R,w) \hat{e} \sigma(w) \,\&$
$\mu(y) \Omega N(R,w) \hat{e} \sigma(w) \,\&\, p(w)(\mu(y) \Omega N(R,w)) \neq \emptyset \,\&$
$a = p(w)(\mu(x) \Omega\ \mu(y) \Omega N(R,w))/p(w)(\mu(y) \Omega N(R,w))\ ]$

© Morten Harboe Rognes 2013

Fra (3) og (3.4) følger at det finnes wêI og aêReell slik at

(4.1) z,xêU & wêMax(R,μ(x))

(4.2) μ(z)ΩN(R,w)êσ(w)

(4.3) μ(x)ΩN(R,w)êσ(w) & p(w)(μ(x)ΩN(R,w))≠ø

(4.4) a= p(w)(μ(z)Ω μ(x)ΩN(R,w))/p(w)(μ(x)ΩN(R,w))

Fra (2) følger: (5) Max(R,μ(x)) Inkl μ(y) Fra dette følger:

(6) Max(R,μ(x))Ω μ(y) = Max(R,μ(x)) Nå har man fra (4.1) og definisjonen av N(R,w) at (7) Max(R,μ(x)) = N(R,w)Ωμ(x). Fra dette og (6) følger

(8) N(R,w)Ωμ(x) = (μ(y)Ωμ(x))Ωμ(x)ΩN(R,w). Fra dette og (4.3) kan man slutte:

(9) ((μ(y)Ωμ(x))Ωμ(x)ΩN(R,w)) êσ(w)

Fra dette, (8) og (4.3) har man:

(10) 1= p(w)((μ(y)Ωμ(x))Ωμ(x)ΩN(R,w))/p(w)(μ(x)ΩN(R,w))

Men fra (4.1), (4.3), (9) og (10) kan man slutte ved hjelp av (3.4) at C(K(y,x),x)= 1. **QED**.

© Morten Harboe Rognes 2013

APPENDIX I

© Morten Harboe Rognes 2013

Teoremer om regulære relative sannsynlighetsfunksjoner

I dette tillegget har vi samlet sammen endel satser som kan utledes i teorien om regulære relative sannsynlighetsfunksjoner. Men "en regulær relativ sannsynlighetsfunksjon" forstår vi en funksjon C som oppfyller de krav som er nevnt i Teorem 19.1 i §19, med andre ord en funksjon C som oppfyller de følgende krav:

(i) Dom(C) Inkl Pt(X)xPt(X) & Rgn(C) Inkl [0,1]
(ii) Kravene C3 - C10 i §16
(iii) (Ey)(<y,X>êDom(C)
(iv) <x,y>êDom(C) →. <x,X>,<y,X>êDom(C) & C(y,X)>0

for en eller annen ikke-tom mengde X. Hensikten med å samle sammen disse satsene er å gi leseren et fyldigere bilde av hva som faktisk kan utledes i teorien BC;2. I alle teoremene nedenfor forutsettes det at C er en slik regulær relativ sannsynlighetsfunksjon.

Teorem 1: Anta <x,y>êDom(C). Da har man:
(a) C(X-x,y)= 1- C(x,y) og (b) C(ø,y)=ø

Teorem 2: (Addisjonssetning) Anta <x1,y>,<x2,y>êC Da gjelder:
C(x1Ux2,y) = C(x1,y)+ C(x2,y) -C(x1Ωx2,y)

Teorem 3: Anta <x;1,y>,<x;2,y>, <x;3,y>êC Da gjelder:
C(UN/i,1,3(x;i),y) = Sum/i,1,3/(C(x;i,y))- C(x;1Ωx;2) - C(x;1Ωx;3,y)-
C(x;2Ωx;3,y)+C(SN/i,1,3/(x;i),y)

Den generelle addisjonssetningen kan forrmuleres slik:

Teorem 4: Anta Konj/i,1,n/(<x;i,y>êDom(C)) Da har man:
C(UN/i,1,n/(x;i),y)= Sum/i,1,n/(C(x;i,y)) - Sum/i<j/(C(x;iΩx;j,y)) +
Sum/i<j<k/(C(x;iΩx;jΩx;k,y))- ....+ (-1)^(n+1)*C(SN/i,1,n/(x;i),y)

Teorem 5: Anta <x;1,y>,<x;2,y>êDom(C) og dessuten at x;1 Inkl x;2. Da har man:
C(x;1,y) =< C(x;2,y)

Teorem 6: Anta <x;1,y>,<x;2,y>, <x;3,y>êC Anta x;1Ωx;2 Inkl x;3. Da gjelder:
C(x;1,y) =< C(x3,y) + C(X-x;2,y)

Teorem 7: Anta Konj/i,1,n/(<x;i,e>êDom(C) og anta <y,e>êDom(C).
Anta videre at UN/i,1,n/(x;i)= I og at Konj/i,1,n/(C(x;i,e)>0. Anta tilslutt at x;iΩx;j=ø for alle i≠j der i,jê{1,...,n} Da har man:
C(y,e)= Sum/i,1,n/(C(x;j,e)*C(y,eΩx;j)

Det neste teoremet vi nevner er det som ofte går under navnet Bayes' teorem

© Morten Harboe Rognes 2013

Teorem 8: Anta Konj/i,1,n/(<x;i,e>êDom(C) og anta <y,e>êDom(C).
Anta videre at UN/i,1,n/(x;i)= I og at Konj/i,1,n/(C(x;i,e)>0. Anta tilslutt at x;iΩx;j=ø for alle i≠j der i,jê{1,...,n} Da har man:

C(x;i, eΩy) = (C(y,eΩx;i)*C(x;i,e))*[Sum/j,1,n/(C(y,eΩx;j)*C(x;j,e))]

Teorem 8 følger ved hjelp av blandt annet Teorem 7 og C10. Teorem 1 - Teorem 8 oppføres her bare for å illustrere en del elementære som kan utledes i forbindelse med regulære relative sannsynlighetsfunksjoner. De kan også utlede i teorien C;1.

Teorem 9: Anta <x,e>êDom(C). Definer P;e og σ ved:

(i) P;e= Mg(<x,C(x,e)>: <x,e>êDom(C).
(ii) σ = Mg(y: <y,e>êDom(C)

Da har man at <X,σ,P;e> er et endelig-additivt sannsynlighetsrom og man har:

(Ax)(Ay)(x,yêσ & P;e(y)≠0 → P;e(xΩy)/P;e(y) = C(x,eΩy))

Teorem 10: Anta <x,y>,<z,y>êDom(C) Da har man

C(x,y)=0 → C(xΩz,y)=0

Vi bemerker at dette er et enkelt korollar til Teorem 5.

Teorem 11: Anta <x1,y><x2,y>êDom(C). Da har man

C((X-x1)Ux2,y)=1 & C(x;1,y)=1 → C(x2,y)=1

Beviset for dette teoremet kan føres ved hjelp av Teorem 1, Teorem 2 og Teorem 10

Teorem 12: Man har:

(a) <x1,y><x2,y>êDom(C) &x1 Inkl x2.→ C((X-x1)Ux2,y)=1
(b) <x1,y>êDom(C) & y Inkl x1 → C(x1,y) = 1

Vi bemerker at man ikke kan utlede det omvendte av (a) i dette teoremet. Har man <x1,y><x2,y>êDom(C) & C((X-x1)Ux2,y)=1 kan man ikke slutte at x1 Inkl x2.

Teorem 13: Anta Konj/i,1,3/(<x;i,y>êDom(C)). Anta

C((X-(x;1Ωx;2))Ux;3,y)=1.

Da har man:

(a) C(x;1,y) =< C(x;3,y) + C(X-x;2,y)
(b) C(x;1Ωx;2,y) = C(x;3,y)- C((X-(x;1Ωx;2)Ωx;3,y)

Teoremet ovenfor er en litt sterkere versjon av Teorem 6. Man ser at Teorem 6 følger fra denne satsen og Teeorem 12. Både Teorem 6 og Teorem 12 har en viss relevans i forbindelse med hypotetisk deduktiv metode. Anta vi har samlet inn en viss evidens y og vurderer hypotesen x;1 i relasjon til y. Impliserer da hypotesen x1 og x2 påstanden x3 og har x3 meget liten grad av troverdighet relativt til y, mens x2 har meget stor grad av troverdighet, vil hypotesen x;1 ha meget liten grad av troverdighet relativt til y.

Vi skal nevne ytterligere noen elementære teoremer slik at man kan se tydeligere litt flere av

© Morten Harboe Rognes 2013

"ansiktstrekkene" til teorien om regulære relative sannsynlighetsfunksjoner.

Teorem 14: Anta <x,y>, <z,y> êDom(C) Da har man:
(a) C(x,y)=1 & x Inkl z. → C(x,yΩz)=1
(b) C(x,y)>0 & x Inkl z → C(x,yΩz)>0

Bevis: *Ad (a)*: Anta forutsetningene holder. Anta (1) C(x,y)=1 & x Inkl z. Ved hjelp av Teorem 5 har vi da (2) C(z,y)=1. Dette innebærer naturligvis at C(z,y)>0. Fra dette og forutsetningene har vi ved hjelp av det faktum at C oppfyller kravet C10 at

(3) C(xΩz,y)= C(x,yΩz)*C(z,y). Nå har vi siden x inkl z at xΩz=x. Fra dette og (3) følger derfor (4) C(x,y)= C(x,yΩz)*C(z,y). Siden C(x,y)=C(z,y) =1 ifølge (1) og (2) kan vi derfor slutte at C(x,yΩz)=1. Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Anta (5) C(x,y)>0 & x Inkl z. Da har vi fra forutstningene og Teorem 5 at (6) 0<C(x,y) =<C(z,y). Fra (5) og (6) kan man ved hjelp av C10 slutte:

(7) C(xΩz,y)= C(x,yΩz)*C(z,y). Siden x Inkl z følger xΩz=x. Fra dette og (7) følger: C(x,y)= C(x,yΩz)*C(z,y). Men fra dette og (6) følger C(x,yΩz) >0.

Dette avslutter beviset for satsen. **QED**.

Det neste teoremet er en versjon av et teorem som diskuteres av von Wright i von Wrigt [1].

Teorem 15: (Broad, Keynes, Nicod) Anta følgende holder:
(i) <α(0),β>êC & α: N → Pt(X)
(ii) (An)(nêN→ <α(n),β>êDom(C)
(iii) C(α(0),β) > 0
(iv) (An)(nêN → α(0) Inkl α(n))
(v) (An)(nêN → C(α(n+1), βΩ SN/j,1,n/(α(j))) < 1)
Da gjelder:
(An)(n>=1 → C(α(0), βΩSN/i,1,n+1/(α(i))) > C(α(0), βΩSN/i,1,n/(α(i))))

Bevis: Anta forutsetningene holder. Vi viser først at man har:
(a) (An)(n>=1 → Prod/j,1,n/[C(α(j), βΩSN/i,1,j-1/(α(i)))] =
C(SN/i,1,n/(α(i)), β))
Dette bevises ved induksjon på n. *Basistrinn*: n=1. Da har man at
(1) SN/i,1,1/(α(i)) =α(1). Dessuten har man at
(2) Prod/j,1,n/[C(α(j), βΩSN/i,1,j-1/(α(i)))]=
Prod/j,1,1/[C(α(j), βΩSN/i,1,j-1/(α(i)))] =
[C(α(1), βΩSN/i,1,1-1/(α(i)))] = C(α(1), β)
Videre har man at (3) C(SN/i,1,n/(α(i)), β) = C(SN/i,1,1/(α(i)),β) = C(α(1),β) . Man ser på basis av (2) og (3) at påstand (a) holder om n=1.

Induksjonstrinn: Anta som induksjonshypotese at
(4) Prod/j,1,n/[C(α(j), βΩSN/i,1,j-1/(α(i)))] = C(SN/i,1,n/(α(i)), β))
Vi har da ved hjelp av multiplikasjonsaksiomet C10 og (4) at
C(SN/i,1,n+1/(α(i)),β) = C(α(n+1)ΩSN/i,1,n/(α(i)), β) =
C(α(n+1), βΩSN/i,1,n/(α(i)))*C(SN/i,1,n/(α(i)),β)=
C(α(n+1), βΩSN/i,1,n/(α(i)))* Prod/j,1,n/[C(α(j), βΩSN/i,1,j-1/(α(i)))] =
Prod/j,1,n+1/[C(α(j), βΩSN/i,1,j-1/(α(i)))]

© Morten Harboe Rognes 2013

Dette viser at påstand (a) holder for n+1 om den holder for n. Imidlertid må vi her forsikre oss om at forutsetningene i multiplikasjonsteoremet C10 er oppfylt i dette tilfellet.

Fra forutsetningene (i) og (ii) i satsen og de krav som C oppfyller, nemlig C3 - C10 kan man lett utlede ved induksjon:

(5) (An)(n>=1 → <SN/i,1,n/(α(i)),β>êDom(C)) og

(6) (An)(n>=0 → <SN/i,0,n/(s(i)),β> êDom(C))

Andvendelsen av multiplikasjonsaksiomet ovenfor forutsetter at disse to påstandene holder. Fra forutsetning (iv) har vi: (6) (An)(n>0 → α(0) Inkl SN/i,1,n/(α(i))). Vi har derfor for alle n>=1 at (7) C(SN/i,1,n/(α(i)), β) >0 ved hjelp av forutsetning (iii) og Teorem 5. Alt dette viser at vi kan henvise til multiplikasjonsteoremet C10 slik vi har gjort det ovenfor.

Vi bemerker også at vi ved forutsetning (iv) kan utlede

(8) (An)(n>=1 → α(0)ΩSN/j,1,n/(α(j)) = α(0))

Nå har man ved hjelp av forutsetning (iii), (5), (6) og multiplikasjonsaksiomet C10 for alle n>=1 at (9) C(α(0)Ω SN/j,1,n/(α(j)),β) = C(SN/j,1,n/(α(j)),βΩα(0))*C(α(0),β)

Videre har man fra (5),(6), (7) og multiplikasjonsaksiomet C10 for alle n>=1 at

(10) C(α(0)Ω SN/j,1,n/(α(j)),β) =

C(α(0), βΩSN/j,1,n/(α(j)))*C(SN/j,1,n/(α(j)),β)

Nå har man ikraft av (8) at

(11) C(α(0)Ω SN/j,1,n/(α(j)),β) = C(α(0) for alle n>=1

Fra (10) og (11) følger:

(12.1) C(α(0),β) = C(α(0),βΩSN/j,1,n/(α(j)))*C(SN/j,1,n/(α(j)),β)

(12.2) C(α(0),β) = C(α(0),βΩSN/j,1,n+1/(α(j)))*C(SN/j,1,n+1/(α(j)),β)

Sett π(n)=Prod/j,1,n/[C(α(j), βΩSN/i,1,j-1/(α(i)))]. Da har vi fra (a) ovenfor at

(13) π(n) = C(SN/j,1,n/(α(j)),β) for alle n>=1. Vi har også i lys av (7) og forutsetning (v) at

(14) 1>π(n)>0. Fra (12.1), (12.2) og (13) kan man slutte

(15.1) C(α(0),βΩSN/j,1,n/(α(j))) = C(α(0),β)/π(n)

(15.2) C(α(0),βΩSN/j,1,n+1/(α(j))) = C(α(0),β)/π(n+1)

Men siden π(n+1) < π(n) for alle n>=1. Fra (15.1) og (15.2) følger derfor konklusjonen i teoremet, nemlig:

(An)(n>=1 → C(α(0), βΩSN/i,1,n+1/(α(i))) > C(α(0), βΩSN/i,1,n/(α(i))))

Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED**.

Et teorem som det er nærliggende å betrakte i forbindelse med Teorem15 er det følgende:

Teorem 16: Anta at følgende holder:

(i) <α(0),β>êDom(C) & α: N → Pt(X)

(ii) (An)(nêN → <α(n), β>êDom(C))

(iii) C(α(0),β) >0

(iv) (An)(nêN → α(0) Inkl α(n))

(v) (An)(nêN → C(α(n+1), βΩSN/i,1,n/(α(i)))< 1)

(vi) α(0) = SN/i,1,∞/(α(i)) og C er tellbart additiv.

Da gjelder:

Lim/n→∞/(C(α(0), βΩSN/i,1,n/(α(i))) = 1

Bevis: Man legger merke til at forutsetningene i dette teoremet er de samme som i Teorem 15 bortsett fra at vi har lagt til forutsetning (vi). Dette innebærer at forutsetningene samlet sett er

© Morten Harboe Rognes 2013

sterkere i dette teoremet enn i Teorem 15. Av denne grunn kan vi på nøyaktig samme måte som i beviset for Teorem 15 utlede:

(1) $(An)(n>=1 \rightarrow C(\alpha(0)\Omega\ SN/j,1,n/(\alpha(j)),\beta) = C(SN/j,1,n/(\alpha(j)),\beta)^* C(\alpha(0), \beta\Omega SN/j,1,n/(\alpha(j)))$

Siden vi fra forutsetning (iv) kan utlede $\alpha(0)\Omega\ SN/i,1,n/(\alpha(i)) = \alpha(0)$ følger fra (1)

(1.1) $(An)(n>=1 \rightarrow C(\alpha(0),\beta) = C(SN/j,1,n/(\alpha(j)),\beta)^* C(\alpha(0), \beta\Omega SN/j,1,n/(\alpha(j)))$

Fra dette fremgår det, siden $C(\alpha(0),\beta)>0$, og siden $C(SN/i,1,n/(\alpha(i)), \beta)>0$ fordi $\alpha(0)$ Inkl $SN/i,1,n/(\alpha(i))$, at

(1.2) $(An)(n>=1 \rightarrow C(\alpha(0), \beta\Omega SN/j,1,n/(\alpha(j)) = C(\alpha(0), \beta)/ C(SN/j,1,n/(\alpha(j)),\beta))$

Fra (1.2) ser man at det vil være tilstrekkelig å vise

(+) $Lim/n\rightarrow\infty/(C(SN/j,1,n/(\alpha(j)),\beta)) = C(\alpha(0),\beta)$

for å vise at satsen holder.

La oss først vise

(2.1) $(An)(n>=1 \rightarrow SN/i,1,n+1/(\alpha(i))$ SInkl $SN/i,1,n/(\alpha(i)))$

Det er åpenbart at vi har $SN/i,1,n+1/(\alpha(i))$ Inkl $SN/i,1,n/(\alpha(i))$. Anta for reduktio ad absurdum at $SN/i,1,n+1/(\alpha(i)) = SN/i,1,n/(\alpha(i))$. Da har man:

$\beta\Omega SN/i,1,n/(\alpha(i))$ Inkl $SN/i,1,n+1/(\alpha(i))$ Inkl $\alpha(n+1)$

Men fra dette og Teorem 12b kan man slutte $C(\alpha(n+1), \beta\Omega SN/i,1,n+1/(\alpha(i)))=1$. Dette strider åpenbart mot forutsetning (v). Dette viser at (2.1) holder.

La oss dernest godtgjøre at

(3.1) $\alpha(1) - \alpha(0) = UN/n,1,\infty/[SN/i,1,n/(\alpha(i)) - SN/i,1,n+1/(\alpha(i))]$

Vi viser først inklusjonen mot venstre i (3.1): Anta for vilkårlig x at

$x\hat{e}\ UN/n,1,\infty/[SN/i,1,n/(\alpha(i)) - SN/i,1,n+1/(\alpha(i))]$. Da har vi for noe $n>=1$ at

(3.2) $x\hat{e}[SN/i,1,n/(\alpha(i)) - SN/i,1,n+1/(\alpha(i))]$. Da følger $x\hat{e}SN/i,1,n/(\alpha(i))$ og derfor at $x\hat{e}\alpha(1)$. Anta for reduktio at $x\hat{e}\alpha(0)$ Da har vi ved hjelp av forutsetning (vi) at $x\hat{e}\alpha(0)=SN/i,1,\infty/(\alpha(i))$. Siden $SN/i,1,\infty/(\alpha(i))$ Inkl $SN/i,1,n+1/(\alpha(i))$ følger i så fall $x\hat{e}SN/i,1,n+1/(\alpha(i))$ som strider mot (3.2). Vi har altså at $\neg(x\hat{e}\alpha(0))$ og derfor $x\hat{e}(\alpha(1) - \alpha(0))$.

La oss så vise inklusjonen mot høyre i (3.1). Anta for vilkårlig x at

(3.3) $x\hat{e}(\alpha(1)-\alpha(0))$. Da har man (3.4) $\neg(x\hat{e}SN/i,1,\infty/(\alpha(i)))$. Nå har man

(3.5) $SN/i,1,\infty/(\alpha(i)) =SN/i,1,\infty/(SN/n,1,i/(\alpha(n)))$. Fra (3.4) og (3.5) følger:

(3.6) $\neg(Aj)(j>=1 \rightarrow x\hat{e}SN/i,1,j/(\alpha(i))$. Med andre ord har man:

(3.7) $(Ej)(j>=1 \&\neg(x\hat{e}SN/i,1,j/(\alpha(i))))$. La j0 være det minste j av denne art. Da har man $\neg(x\hat{e}SN/i,1,j0/(\alpha(i))) \& x\hat{e}SN/i,1,j0-1/(\alpha(i))$. Her må $j0>1$ siden vi fra (3.3) har $x\hat{e}\alpha(1)$. Det følger at $x\hat{e}\ UN/n,1,\infty/[SN/i,1,n/(\alpha(i)) - SN/i,1,n+1/(\alpha(i))]$

Dette viser at (3.1) holder.

Vi vil nå vise:

(4.1) $(Ak)(k>=1 \rightarrow SN/j,1,k/(\alpha(j)) = \alpha(1) - UN/r,1,k-1/[SN/i,1,r/(\alpha(i)) - SN/i,1,r+1/(\alpha(i))])$

Anta $k>=1$ for vilkårlig k.

Vi viser først inklusjonen mot høyre i (4.1). Anta for vilkårlig x at $x\hat{e}SN/j,1,k/(\alpha(j))$. Siden $SN/j,1,k/(\alpha(j))$ Inkl $\alpha(1)$ har vi $x\hat{e}\alpha(1)$. Anta for reduktio ad absurdum at

© Morten Harboe Rognes 2013

(4.2) xê UN/r,1,k-1/[SN/i,1,r/(α(i)) - SN/i,1,r+1/(α(i))]

Da har man (4.3) xê[SN/i,1,r/(α(i)) - SN/i,1,r+1/(α(i))] for noe r der 1=<r<k

Nå har man for alle pêN & p=<k at

SN/i,1,k/(α(i)) Inkl SN/i,1,p/(α(i))

Siden r<k følger (r+1)=<k. Nå har vi xêSN/j,1,k/(α(j)). Det følger derfor at xêSN/j,1,r+1/(α(j)). Men dette strider mot (4.3). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (4.1) holder.

La oss så vise at inklusjonen mot venstre holder. Anta derfor for vilkårlig x at

(4.4) xê(α(1) - UN/r,1,k-1/[SN/i,1,r/(α(i)) - SN/i,1,r+1/(α(i))])

Nå har man åpenbart:

(4.5) α(1) = UN/n,1,∞/(SN/i,1,n/(α(j))

Det følger derfor at

(4.6) xêSN/j,1,s/(α(j)) for noe s>=1

Fra (4.4) følger:

(4.7) ¬(xêUN/r,1,k-1/[SN/i,1,r/(α(i)) - SN/i,1,r+1/(α(i))]) Herav har man:

(4.8) (Ar)(1=<r=<k-1 → ¬(xê(SN/i,1,r/(α(i)) - SN/i,1,r+1/(α(i)))))

Siden (k-1)=<(k-1) har vi herav:

(4.9) ¬(xê(SN/i,1,k-1/(α(i)) - SN/i,1,k/(α(i)))). Fra dette følger:

(4.10) xêSN/i,1,k-1/(α(i)) → xêSN/i,1,k/(α(i))

Det er nå to muligheter når det gjelder s.

Tilfelle (i): s>=k Da har vi

xêSN/i,1,s/(α(i)) Inkl SN/i,1,k/(α(i)). Da xêSN/i,1,k/(α(i))

I dette tilfelle holder åpenbart inklusjonen mot venstre i (4.1)

Tilfelle (ii): s<k. Da har man s=<(k-1). Er da s=k-1 følger ved hjelp av (4.10) at xêSN/i,1,k/(α(i)) som er det man ønsker. Vi betrakter derfor det tilfelle der s<k-1.

Fra (4.8) kan man slutte:

(4.11) (Ar)(1=<r=<k-1 & xê(SN/i,1,r/(α(i)) → xêSN/i,1,r+1/(α(i)))

Fra dette følger:

(4.12) (Ar)(1=<r=<k-1 & xê(SN/i,1,r/(α(i)) → xêSN/i,1,k/(α(i)))

Siden 1=<s<(k-1) følger fra (4.12):

(4.13) xê(SN/i,1,s/(α(i)) → xêSN/i,1,k/(α(i))

Fra (4.6) har vi xêSN/j,1,s/(α(j)). Fra dette og (4.13) følger xêSN/i,1,k/(α(i)) Som er det vi ønsker. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (4.1).

Nå har man som et generelt gyldig teorem:

(5.1) <α,γ>,<β,γ>êDom(C) & α Inkl β → C(β-α,γ) = C(β,γ) - C(α,γ)

La oss gi et bevis for dette. Anta (5.2) <α,γ>,<β,γ>êDom(C) & α Inkl β.

På basis av C3 -C10 har man da:

C(β-α,γ) = C(βΩ(X-α),γ) = C(β,γ)+ C(X-α,γ)- C(βU(X-α)=

C(β,γ) +(1-C(α,γ))- C(X,γ) = C(β,γ)-C(α,γ)

fordi forutsetningen om at α Inkl β impliserer at βU(X-α) =X og vi dessuten har at C(X,γ)=1. Dette viser at (5.1) holder.

Sett per definisjon:

(*) φ(n) = SN/i,1,n/(α(j)) - SN/i,1,n+1/(α(j)).

Vi skal da vise:

(6.1) (Ak)(Aj)(k,j>=1 & k≠j → φ(k)Ωφ(j) =ø)

© Morten Harboe Rognes 2013

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes k,j der k,r>=1 & k≠r og at det finnes x slik at

(6.2) xê[SN/i,1,k/(α(j)) - SN/i,1,k+1/(α(j))]Ω[SN/i,1,r/(α(j)) - SN/i,1,r+1/(α(j))]

Siden k≠r har vi enten k<r eller k>r. Vi ser bare på det første tilfellet siden det andre blir helt analogt. Er k<r har vi k+1=<r og da

SN/i,1,r/(α(j)) Inkl SN/i,1,k/(α(k+1)). Men xêSN/i,1,r/(α(j)). Det følger at xêSN/i,1,k/(α(k+1)) som strider mot (6.2). Dette viser at (6.1) holder.

Fra (6.1), (3.1), (5.1) og forutsetningen om at C er tellbart additiv følger siden α(0) Inkl SN/j,1,n/(α(j)) Inkl α(1) at

(7) C(α(1),β) - C(α(0),β) = Sum/j,1,∞/(C(φ(j),β) = Lim/n→∞/(Sum/j,1,n/(C(φ(j),β))

Anta ε>0. Da følger fra (7) at det finnes k>=1 slik at

(8) (C(α(1),β) - C(α(0),β)) - ε < Sum/j,1,k/(C(φ(j),β))

Ved hjelp av (4.1) og (5.1) følger at:

(9) C(SN/j,1,k+1/(α(j)) = C(α(1),β) - C(UN/r,1,k/[SN/i,1,r/(α(i)) - SN/i,1,r+1/(α(i))],β) = C(α(1),β) - Sum/j,1,k/(C(φ(j),β)

Vi må benytter her at UN/r,1,k/[SN/i,1,r/(α(i)) - SN/i,1,r+1/(α(i))] Inkl α(1). Men at dette holder er trivielt. Fra (8) og (9) har man:

(10) C(SN/j,1,k+1/(α(j)),β) < C(α(0),β) + ε

Vi har nå vist at for alle ε>0 finnes k>=1 der (10) holder. Siden α(0) Inkl SN/i,1,k+1/(α(i)) kan man slutte at C(α(0),β) =< C(SN/i,1,k+1/(α(i)), β). Dette sammen med (10) innebærer at vi har Lim/k→∞/(C(SN/j,1,k/(α(j)),β) = C(α(0),β). Dette viser at (+) ovenfor holder.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

© Morten Harboe Rognes 2013

Referanser

© Morten Harboe Rognes 2013

Referanser

Hansson[1]	Hansson, Bengt , "Choice structures and preference relations", Synthese, Vol 18, 1968, pp 443-458
Hansson[2]	Hansson, Bengt , "Fundamental axioms for preference relations", Synthese, Vol 18, 1968, pp 423-442
Rognes [1]	Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2]	Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3]	Rognes, Morten, *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Rognes [4]	Rognes, Morten. *Egenskaper. Del I.* Upublisert manuskript, 1986
Rognes [5]	Rognes, Morten. *Egenskaper. Del II (Bevis for teoremer)* , Upublisert manuskript, 1987
Shoenfield [1]	Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic*. London. Addison-Wesley Publishing Company. 1967
Takeuti [1]	Takeuti, Gaisi and Zaring, W.M, *Introduction to Axiomatic Set Theory*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971
von Wright [1]	von Wright, Georg Henrik , "The paradoxes of confirmation", Theoria, Vol 3, 1965, pp 255 - 274
von Wright [2]	von Wright, Georg Henrik , *The Logical Problem of Induction*, Oxford, 1941

© Morten Harboe Rognes 2013